SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Lara Novak

PRODORNE KRIVULJE PLOHA

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Ema Jurkin

Suvoditelj rada:
prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, veljača, 2019.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U radu će se proučavati tipovi prodornih krivulja valjaka, stožaca i sfera. Na početku rada kratko su opisani i prikazani valjak, stožac i sfera te njihovi presjeci ravninom. Slike su izrađene u programu GeoGebra. Nadalje, opisani su i prikazani prodori dvaju valjaka, dvaju stožaca, dviju sfera, valjka i stošca, valjka i sfere te stošca i sfere. Prodorne će se krivulje konstruirati u Mongeovoj projekciji korištenjem dviju metoda. Prva metoda koju upoznajemo je metoda presjeka s pramenom ravnina. Te pomoćne ravnine mogu, ali i ne moraju biti paralelne. Druga metoda je metoda presjeka s koncentričnim sferama. Ona dolazi u obzir ako su plohe rotacijske i ako im se osi sijeku. Tada je sjecište osi ploha ujedno i središte pomoćnih sfera. Slijede konstrukcije prodornih krivulja, detaljno opisane i prikazane slikom. Slike su izrađene u programu AutoCAD. Na kraju rada kratko je riječ i o tangenti prodorne krivulje. U Mongeovoj projekciji prikazane su tangencijalne ravnine valjka, stošca i sfere, a za kraj je na primjeru prodorne krivulje valjka i sfere konstruirana tangenta u proizvoljnoj točki.

Poglavlje 1

Plohe

1.1 Plohe

Ploha je skup od ∞^2 povezanih točaka proširenog euklidskog prostora.[1] Plohe koje se mogu izraziti algebarskom jednadžbom nazivamo algebarske plohe. Red algebarske plohe je broj svih probodišta plohe i bilo kojeg pravca prostora koji ne leži na toj plohi. Uočimo, ravninu pravac probada u jednoj točki i zbog toga je ravnina ploha prvog reda. Kružni valjak, kružni stožac i sfera plohe su drugog reda jer ih pravac probada u dvije točke.

Napomena: svaka od spomenutih ploha ima svoju algebarsku jednadžbu, međutim za potrebe ovoga rada one nam nisu od velike važnosti pa ih nećemo spominjati.

Posebno mjesto među plohama zauzimaju pravčaste plohe. Pravčaste su one plohe kod kojih kroz svaku točku plohe prolazi barem jedan pravac koji leži na njoj. Te pravce nazivamo izvodnice. One mogu biti razvojne ili vitoperne. Razvojne su one plohe koje se bez istezanja i kidanja mogu razviti u ravninu. Suprotno od razvojnih su vitoperne plohe. Sve razvojne plohe su pravčaste i primjer takvih su valjak i stožac.

Ukoliko ploha nastaje rotacijom krivulje oko fiksnog pravca u prostoru govorimo o rotacijskoj plohi. Naprimjer, stožac nastaje rotacijom pravca oko osi koja ga siječe. Plohe koje nastaju gibanjem jedne krivulje po drugoj nazivamo translacijskim plohama. Primjer je kružni valjak jer može nastati gibanjem pravca po kružnici, ali i gibanjem kružnice po pravcu.

Kružni valjak kao valjkasta ploha je skup točaka u prostoru koje leže na paralelnim spojnicama (izvodnicama) točaka dane kružnice k i neke beskonačno daleke točke. Ako valjak interpretiramo kao geometrijsko tijelo, tada je on omeđen s dvije paralelne ravnine u kojima leže njegove osnovke (baze) i valjkastom plohom. Valjkasta ploha je ujedno i plašt valjka. Dotaknimo se nekih bitnih pojmova koje vežemo uz valjak. Os valjka je pravac koji prolazi središtem krugova. Izvodnica valjka je dužina koja spaja dvije točke na rubu osnovki i paralelna je s osi valjka. Te točke na rubu osnovki još nazivamo i nožištima izvodnica. Visina valjka je udaljenost ravnina u kojima leže osnovke valjka. Nadalje, razlikujemo uspravni i kosi valjak. Valjak je uspravan ako mu je izvodnica okomita na ravninu osnovke. Ako to nije slučaj, valjak je kosi. Osim kružnog valjka postoji još vrsta s obzirom na krivulju osnovke, jedan od njih je i eliptički valjak kojemu su osnovke dvije sukladne elipse.

Kružni stožac kao stožasta ploha je skup točaka u prostoru koje leže na spojnicama dane točke V s točkama dane kružnice k. Točka V je vrh stošca, a spojnice njegove izvodnice. Ako stožac promatramo kao geometrijsko tijelo, tada je on omeđen jednom ravninom u kojoj leži njegova osnovka i jednom stožastom plohom koja je plašt tog stošca. Spomenimo neke od pojmova koje vežemo uz stožac. Os stošca je pravac koji prolazi vrhom stošca i središtem osnovke. Izvodnica stošca je dužina koja spaja vrh stošca i točku na rubu osnovke. Visina stošca je udaljenost od vrha stošca do ravnine u kojoj se nalazi njegova osnovka. Stožac može biti uspravan ili kosi. Kažemo da je uspravan ako mu je spojnica vrha i središta osnovke okomita na ravninu osnovke. Inače je stožac kosi. Dvostruki stožac dobijemo kada stožastu plohu ograničimo s dvije paralelne ravnine koje se nalaze s različitih strana vrha.

Sfera je rotacijska ploha koja nastaje rotacijom kružnice oko fiksnog pravca prostora koji prolazi središtem te kružnice. Geometrijsko tijelo omeđeno sferom je kugla. Sferu definiramo i na sljedeći način: sfera je skup točaka u prostoru koje su jednako udaljene od čvrste točke. Tu čvrstu točku nazivamo središte sfere.

Napomena: u daljnjem radu će se pod pojmom valjak misliti na kružni valjak i pod pojmom stožac na kružni stožac. Promatrat ćemo ih kao plohe, a u zadatcima i na slikama biti će prikazana tijela zbog ograničenja crtačeg prostora.

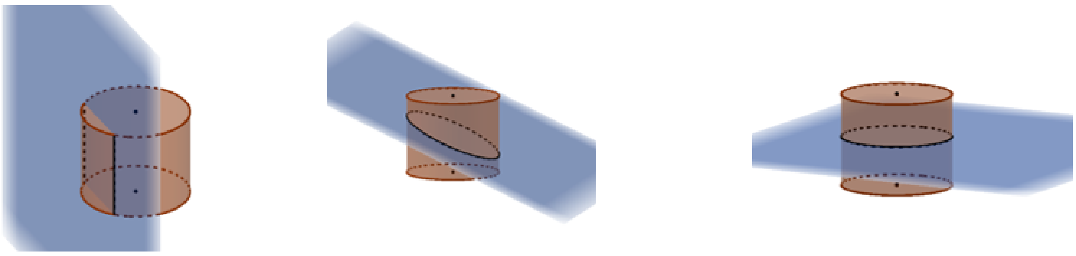
1.2 Presjeci ploha ravninom

Ravninska krivulja je skup od ∞^1 neprekidno povezanih točaka koje leže u istoj ravnini. Red ravninske krivulje jednak je broju sjecišta s bilo kojim pravcem njezine ravnine.[1]

Ravninska krivulja je skup svih zajedničkih točaka plohe i ravnine. Presjek plohe drugog reda ravninom je krivulja drugog reda (ravninska krivulja) koja može biti raspadnuta (degenerirana) ili neraspadnuta. Kod raspadnute imamo mogućnosti da se radi o paru različitih realnih pravaca, paru realnih pravaca koji su pali zajedno ili paru konjugirano imaginarnih pravaca. Ukoliko kao presjek dobijemo neraspadnutu krivulju, dobili smo hiperbolu, parabolu ili elipsu. Podsjetimo se, ukoliko su duljina velike i male poluosi kod elipse jednake, tada se radi o kružnici.

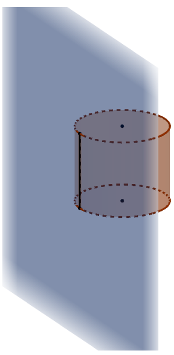
Presjek valjka ravninom

Svaka ravnina siječe valjak u krivulji drugog reda. Ako valjak presječemo ravninom koja je paralelna s njegovim izvodnicama, tada kao presjek dobijemo dvije izvodnice. U slučaju kada ravnina nije paralelna s izvodnicama valjka, presjek je elipsa. Posebno, kada je ravnina paralelna s ravninom njegovih osnovaka, presjek je kružnica.



Slika 1.1: Presjeci valjka ravninom

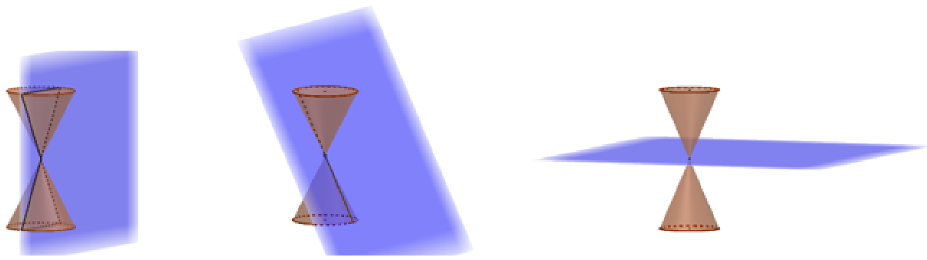
Ako ravnina paralelna s osi valjka dodiruje valjak duž jedne izvodnice, tada se ta ravnina naziva tangencijalna ili dirna ravnina valjka.



Slika 1.2: Tangencijalna ravnina valjka

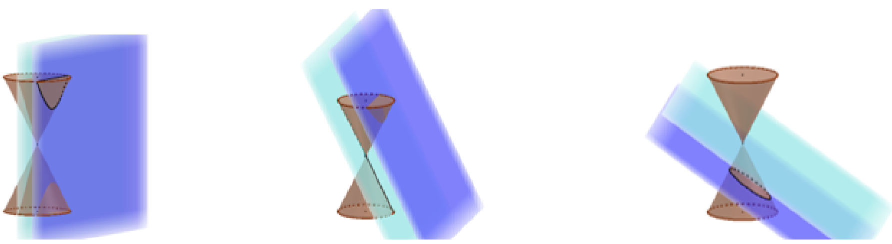
Presjek stošca ravninom

Ukoliko presječna ravnina sadrži vrh stošca, presjek stošca i ravnine su dvije izvodnice koje mogu biti realne i različite, mogu pasti zajedno ili su konjugirano imaginarne.



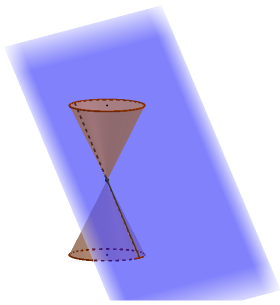
Slika 1.3: Presjeci stošca ravninom koja prolazi vrhom stošca

Ako presječna ravnina ne sadrži vrh stošca, presjek je neraspadnuta konika. Moguća su tri slučaja. Ako je ravnina paralelna s njegove dvije izvodnice presjek je hiperbola. Ako je paralelna s jednom njegovom izvodnicom presjek je parabola. Ukoliko ravnina nije paralelna niti s jednom njegovom izvodnicom, kao presjek imamo elipsu. Posebno, ako je presječna ravnina paralelna s ravninom osnovke, presjek je kružnica.



Slika 1.4: Presjeci stošca ravninom koja ne prolazi vrhom stošca

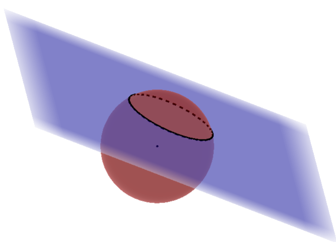
Kao i kod valjka, ravninu koja dodiruje stožac duž jedne njegove izvodnice nazivamo tangencijalnom (dirnom) ravninom stošca.



Slika 1.5: Tangencijalna ravnina stošca

Presjek sfere ravninom

Presjek sfere i ravnine je kružnica. Njezino središte nalazi se u probodištu presječne ravnine i okomice spuštene iz središta sfere na tu ravninu. Tangencijalna ravnina sfere u nekoj točki je ravnina koja prolazi tom točkom i okomita je na spojnicu te točke i središta sfere.



Slika 1.6: Presjek sfere ravninom

Poglavlje 2

Prodorne krivulje

2.1 Prostorne krivulje

Prostorna krivulja je skup od ∞^1 neprekidno povezanih točaka prostora koje ne leže u istoj ravnini.[1] Red prostorne krivulje jednak je broju sjecišta krivulje s nekom ravninom. Sjecišta mogu biti realna i različita, realna i poklapati se ili konjugirano imaginarna. Pod pojmom prava prostorna krivulja podrazumijevamo krivulju koju se ne može smjestiti u ravninu i stoga je red prave prostorne krivulje veći ili jednak tri. Razlikujemo jednodijelne i višedijelne prostorne krivulje.[4] Nadalje, prostorna krivulja osim jednostrukih točaka može imati i višestruke točke. U višestrukim točkama krivulja dodiruje ili siječe samu sebe.

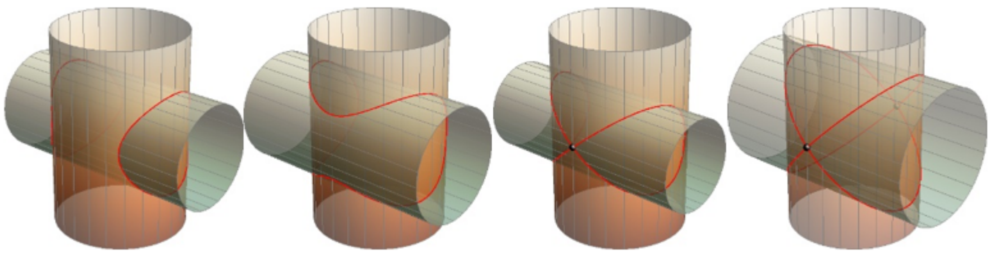
2.2 Prodori ploha

Prostorna krivulja može nastati prodorom algebarskih ploha i tada se ona naziva prodor ili prodorna krivulja. Prodor ili prodorna krivulja je skup svih zajedničkih točaka dviju ploha. Neka su m i n redovi ploha koje prodiru. Tada je red prodorne krivulje $m \cdot n$.[5] Bavit ćemo se prodorom dviju ploha 2. reda. S obzirom da su valjak, stožac i sfera plohe 2. reda, njihova prodorna krivulja bit će 4. reda. Ona može biti jednodijelna ili dvodijelna. Može imati najviše jednu dvostruku točku, ali može se i raspasti na krivulje nižih redova čiji je zbroj jednak četiri. Dvostruka točka na prodornoj krivulji javlja se kada dvije plohe u nekoj točki imaju zajedničku tangencijalnu ravninu ili kada je neka točka dvostruka točka jedne od ploha.

Ovisno o tome kakva je prodorna krivulja (jednodijelna ili dvodijelna) znamo o kakvoj vrsti prodora je riječ. Prodor može biti potpun ili nepotpun (zador). Ukoliko je krivulja dvodijelna tada govorimo o potpunom prodoru. Ako je jednodijelna, prodor je nepotpun.

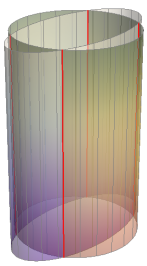
Prodorna krivulja dvaju valjaka

Prodorna krivulja dvaju valjaka je prostorna krivulja 4. reda koja je ili jednodijelna pa govorimo o nepotpunom prodoru ili dvodijelna pa govorimo o potpunom prodoru. Kod nepotpunog prodora postoje izvodnice i na jednom i na drugom valjku koje ne sudjeluju u prodoru, dok kod potpunog prodora sve izvodnice jednog valjka sudjeluju u prodoru. Može se dogoditi da prodorna krivulja ima dvostruku točku, ali može doći i do raspada prodorne krivulje. Do raspada dolazi ako su polumjeri osnovaka valjaka jednaki i ako se njihove osi sijeku. Tada se prodorna krivulja raspada na dvije elipse.



Slika 2.1: Prodorne krivulje dvaju valjaka

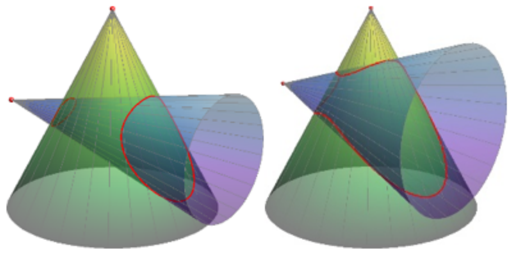
Ako proučavanje ne bismo ograničili na kružne valjke, tada bi kao prodornu krivulju mogli dobiti i četiri pravca.



Slika 2.2: Prodorna krivulja eliptičkih valjaka koja se raspala na četiri pravca

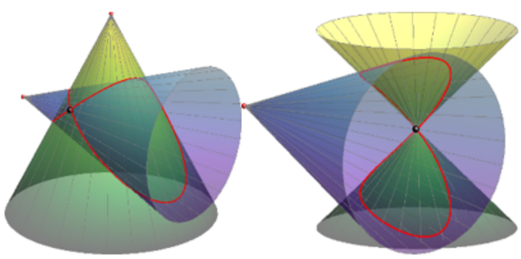
Prodorna krivulja dvaju stožaca

Prodorna krivulja dvaju stožaca je prostorna krivulja 4. reda koja može biti jednodijelna ili dvodijelna. Slično kao i kod prodora dvaju valjaka, ako i na jednom i na drugom stošcu postoje izvodnice koje ne sudjeluju u prodoru, krivulja je jednodijelna. Ako sve izvodnice jednog stošca probadaju drugi, tada je riječ o dvodijelnoj krivulji.



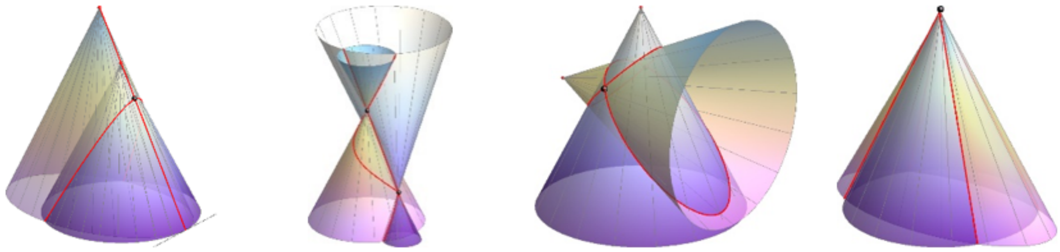
Slika 2.3: Prodorne krivulje dvaju stožaca

U dva slučaja može se javiti dvostruka točka. Prvi je da u toj točki stošci imaju zajedničku tangencijalnu ravninu, a drugi da vrhom jednog stošca prolazi drugi stožac.



Slika 2.4: Prodorne krivulje dvaju stožaca s dvostrukom točkom

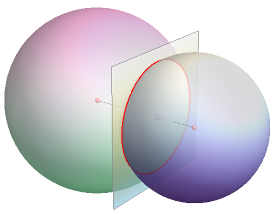
Ako se osi stožaca sijeku, a stošci imaju dvije zajedničke tangencijalne ravnine, ali nijednu zajedničku izvodnicu, tada se prostorna krivulja raspada na dvije elipse. Ako stošci nemaju isti vrh, ali imaju zajedničku izvodnicu i duž nje tangencijalnu ravninu, tada se prodorna krivulja raspada na dvostruki pravac i koniku. Za pravac kažemo da je dvostruki jer je on dvostruko brojeni pravac u raspadu (pod uvjetom da se radi o zajedničkoj izvodnici i tangencijalnoj ravnini duž nje). Ako dva stošca imaju zajednički vrh, kao prodornu krivulju mogli bismo dobiti četiri pravca.



Slika 2.5: Raspadnute prodorne krivulje dvaju stožaca

Prodorna krivulja dviju sfera

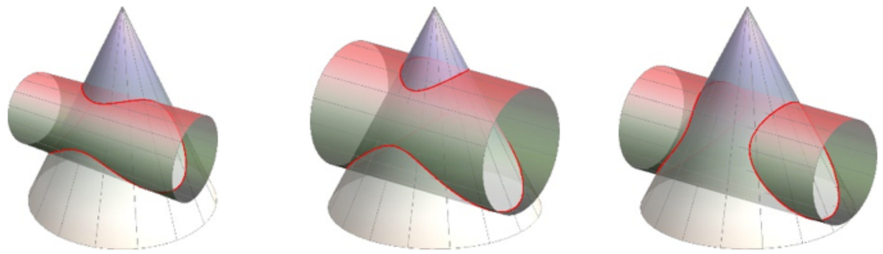
Prodorna krivulja dviju sfera je kružnica. Ona je okomita na spojnicu središta sfera i njezino se središte nalazi na toj spojnici.



Slika 2.6: Prodorna krivulja dviju sfera

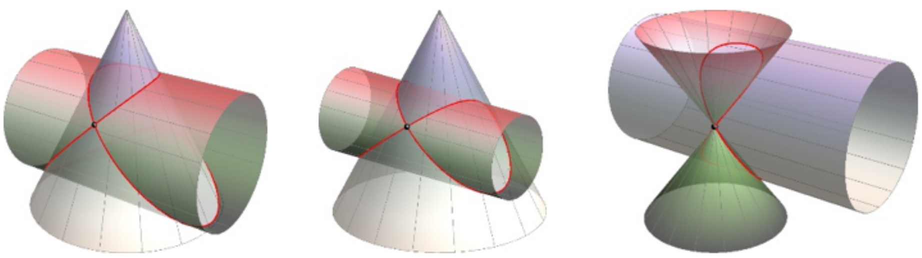
Prodorna krivulja valjka i stošca

Prodorna krivulja valjka i stošca je prostorna krivulja 4. reda koja može biti jednodijelna (nepotpun prodor) ili dvodijelna (potpuni prodor).



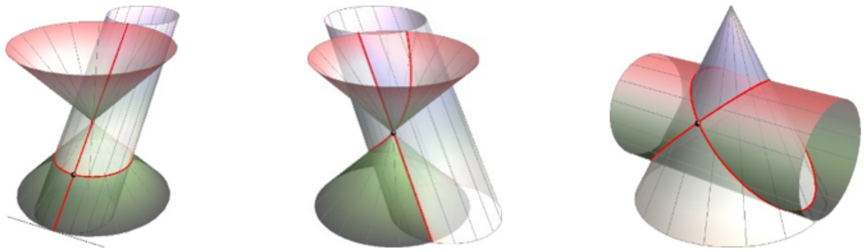
Slika 2.7: Prodorne krivulje valjka i stošca

Dvostruka točka može se javiti u dva slučaja: valjak i stožac imaju jednu zajedničku tangencijalnu ravninu, vrh stošca leži na valjku.



Slika 2.8: Prodorne krivulje valjka i stošca s dvostrukom točkom

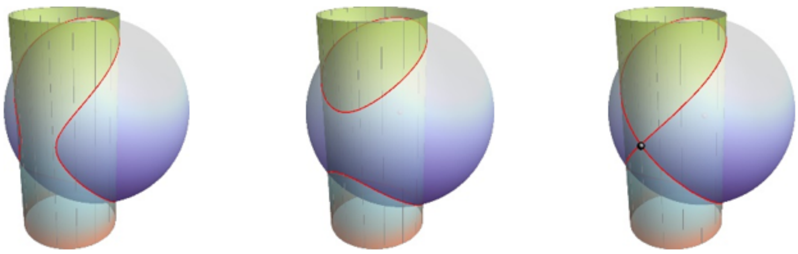
Do raspada krivulje dolazi kada stožac i valjak imaju zajedničku jednu izvodnicu i tangencijalnu ravninu duž te izvodnice, zatim kada imaju zajedničku jednu izvodnicu, ali različite tangencijalne ravnine duž te izvodnice te kada nemaju zajedničkih izvodnica, ali u dvije točke imaju zajedničke tangencijalne ravnine.



Slika 2.9: Raspadnute prodorne krivulje valjka i stošca

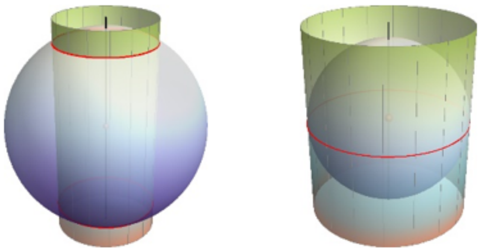
Prodorna krivulja valjka i sfere

Prodorna krivulja valjka i sfere je prostorna krivulja 4. reda koja može biti jednodijelna ili dvodijelna. Ukoliko plohe imaju zajedničku točku u kojoj imaju zajedničku tangencijalnu ravninu, u toj točki će i prodorna krivulja imati dvostruku točku.



Slika 2.10: Prodorne krivulje valjka i sfere

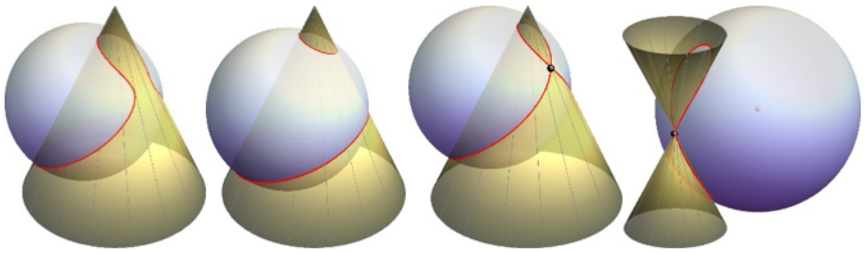
Ako se središte sfere nalazi na osi valjka, ali valjak i sfera nemaju jednake polumjere, prodorna krivulja se raspada na dvije kružnice jednakih polumjera. Ako je polumjer sfere jednak polumjeru valjka, prodorna krivulja je kružnica polumjera jednakog polumjeru tih ploha.



Slika 2.11: Prodorne krivulje valjka i sfere ako je središte sfere na osi valjka

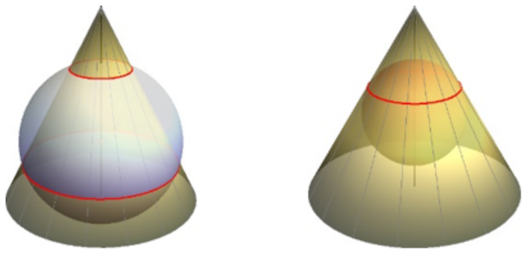
Prodorna krivulja stošca i sfere

Prodorna krivulja stošca i sfere je prostorna krivulja 4. reda koja može biti jednodijelna, dvodijelna, s dvostrukom točkom ili bez nje.



Slika 2.12: Prodorne krivulje stošca i sfere

Ako se središte sfere nalazi na osi stošca doći će do raspada; krivulja se raspada na dvije kružnice različitih polumjera. Poseban slučaj kada te dvije kružnice padnu zajedno je da se cijela sfera nalazi unutar stošca i dodiruje ga sa svih strana.



Slika 2.13: Prodorne krivulje stošca i sfere ako je središte sfere na osi stošca

Ortogonalna projekcija prostorne krivulje 4. reda je ravninska krivulja 4. reda. Ako dvije plohe 2. reda imaju zajedničku simetralnu ravninu paralelnu s ravninom projekcije, njihova je prodorna krivulja simetrična s obzirom na promatranu simetralnu ravninu pa će se projicirati u dva puta brojenu krivulju 2. reda.[3]

Sve slike iz potpoglavlja 2.2. preuzete su iz [1].

Poglavlje 3

Metode rješavanja prodora

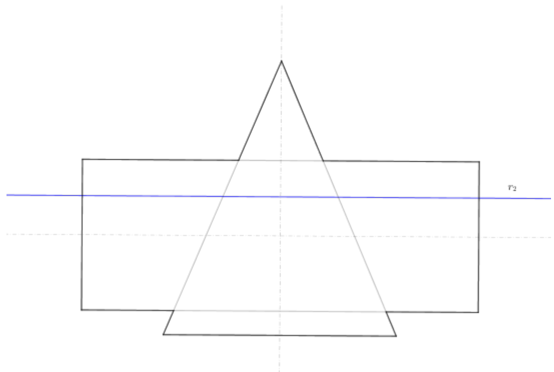
Neka su zadane dvije plohe koje se prodiru. Konstruirati prodornu krivulju znači odrediti skup realnih točaka te krivulje. Bavit ćemo se metodama u kojima se koriste neke pomoćne plohe. Ako su te plohe ravnine, govorimo o metodi presjeka s pramenom ravnina koje mogu, ali i ne moraju biti paralelne. Ukoliko su one sfere, govorimo o metodi rješavanja prodora pomoću koncentričnih sfera. Podsjetimo se, cilj je ravnalom i šestarom konstruirati prodornu krivulju koristeći jednu od spomenutih metoda imajući na umu da je najjednostavnije konstruirati pravce i kružnice.

3.1 1. metoda - Metoda presjeka s pramenom (paralelnih) ravnina

Prva metoda koju spominjemo je metoda pramena presječnih ravnina. Svaka ravnina siječe svaku od ploha po jednoj ravninskoj krivulji. Dvije dobivene krivulje sijeku se u točkama koje su zajedničke točke danih ploha. Te su točke ujedno i točke prodorne krivulje. Znamo da je svaka ravnina određena svojim tragovima. Osvrnimo se najprije na pramen paralelnih ravnina. Razlikujemo onaj pramen paralelnih ravnina koji je paralelan s tlocrtnom ravninom (ravninom π_1), nacrtnom ravninom (ravninom π_2) i onaj koji je paralelan s bokocrtnom ravninom (ravninom π_3).

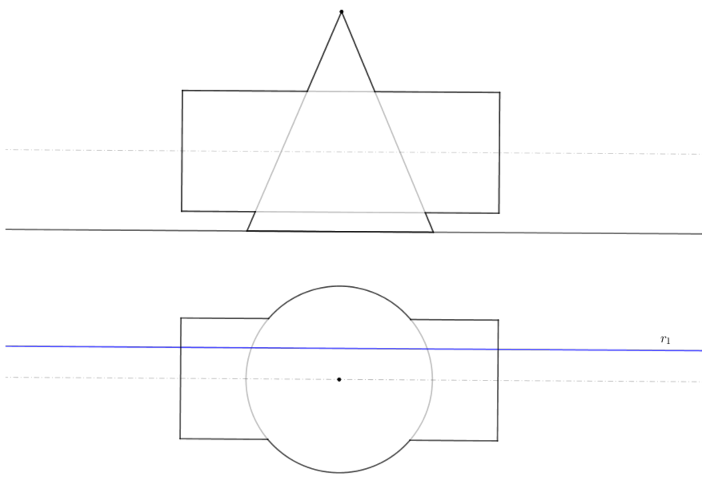
Pogledajmo sljedeći primjer: neka nam je zadan prodor uspravnog valjka i uspravnog stošca. Pitamo se: hoćemo li prodornu krivulju tražiti pomoću pramena ravnina paralelnih s tlocrtnom, nacrtnom ili bokocrtnom ravninom. Razmotrimo sve slučajeve.

Promotrimo najprije pramen ravnina paralelnih s tlocrtnom ravninom. Presjek valjka i ravnine su dvije izvodnice (napomena: ako je promatrana pomoćna ravnina ujedno i tangencijalna ravnina valjka, tada je presjek te ravnine i valjka jedna izvodnica). Presjek stošca i ravnine je kružnica.



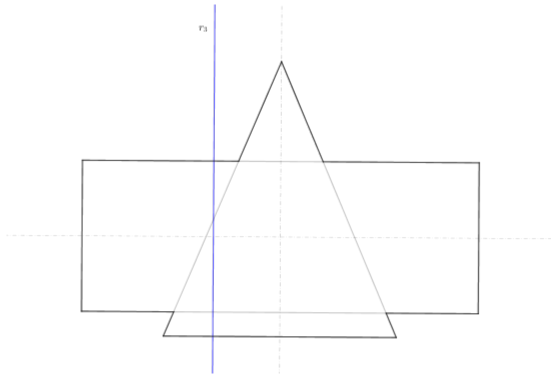
Slika 3.1: Pomoćna ravnina paralelna s tlocrtnom ravninom

Nadalje, pogledajmo što kao presjek dobijemo kada uzimamo pramen ravnina paralelnih s nacrtnom ravninom. Presjek valjka i ravnine su izvodnice, presjek stošca i ravnine je grana hiperbole.



Slika 3.2: Pomoćna ravnina paralelna s nacrtnom ravninom

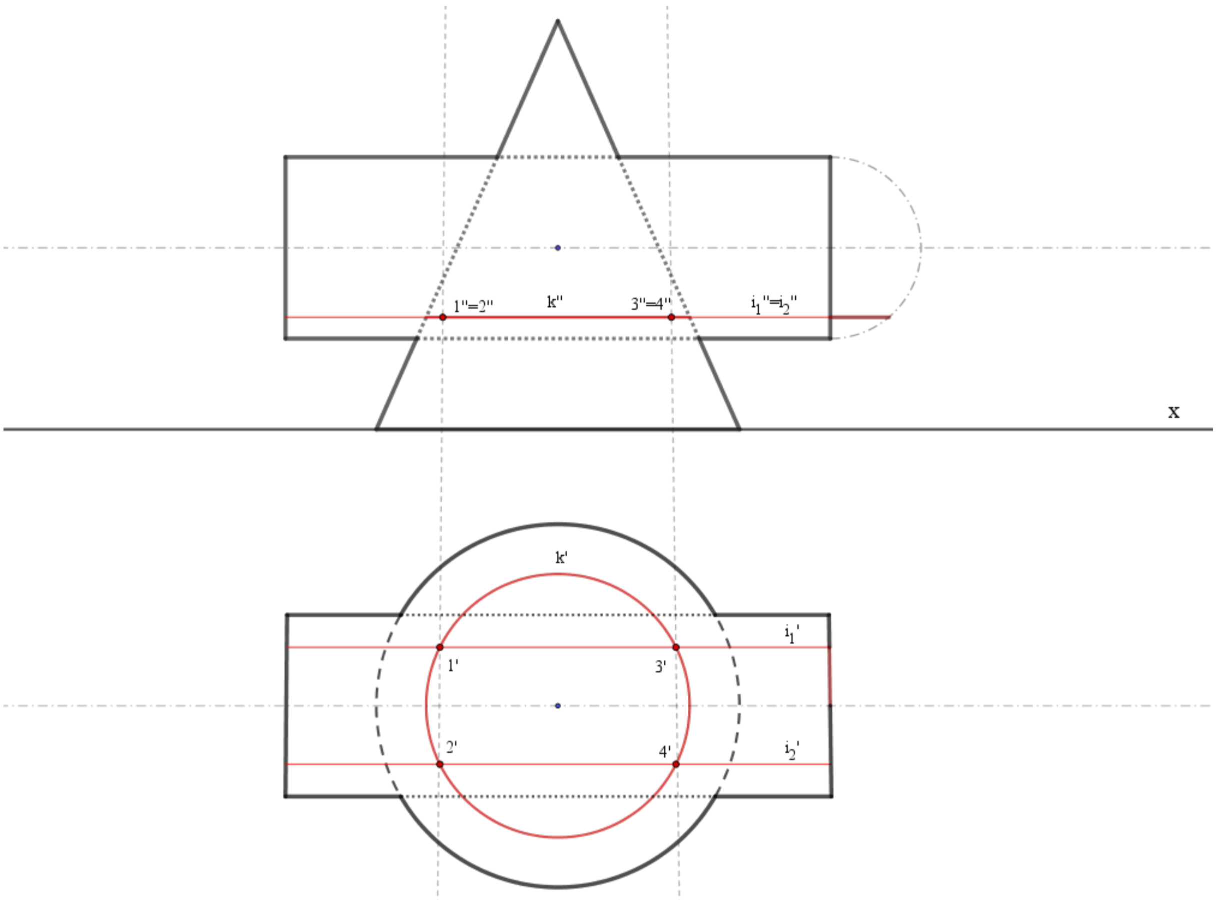
I na kraju nas zanima još pramen ravnina paralelan s bokocrtnom ravninom. Presjek valjka i ravnine je kružnica, presjek stošca i ravnine je grana hiperbole.



Slika 3.3: Pomoćna ravnina paralelna s bokocrtnom ravninom

Zbog jednostavnosti konstrukcije prodorne krivulje najpogodnije je za pomoćne ravnine birati ravnine paralelne s tlocrtnom ravninom.

Nakon što smo se odlučili s kojim ravninama ćemo raditi, uzimamo jednu po jednu ravninu. Ona je u Mongeovoj projekciji zadana svojim tragovima. Svaka od ravnina siječe plohe u prodoru u po jednoj ravninskoj krivulji (krivulja dakle može biti kružnica ili pravac na kojemu leži izvodnica), a sjecište tih krivulja zajedničke su točke ploha te tako i tražene točke prodorne krivulje. Nadalje, postavljamo neku drugu ravninu paralelnu s tlocrtnom ravninom i opet tražimo presjek ploha i odabrane ravnine. Dobivamo sjecišta prodorne krivulje. Postupak ponavljamo sve dok ne dobijemo dovoljan broj točaka koje spajamo i tako dobivamo traženu prodornu krivulju.



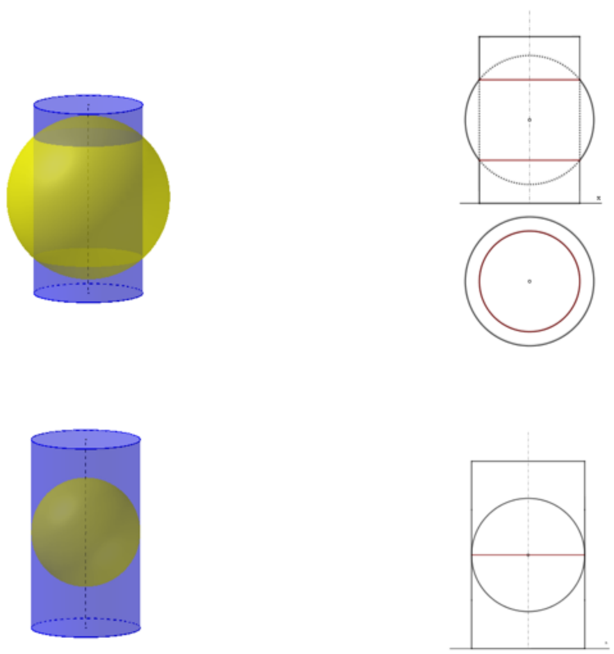
Slika 3.4: Metoda presjeka s ravninom paralelnom s tlocrtnom ravninom

U nekim slučajevima niti jedan od spomenutih pramena neće biti pogodan. Tada možemo birati neke druge pramene ravnina. Ukoliko su dana dva valjka čije izvodnice nisu paralelne niti s jednom ravninom projekcije π_1, π_2, π_3, pogodno je izabrati pramen ravnina paralelnih s izvodnicama oba valjka. Ponekad ćemo, međutim, birati pramene ravnina koje nisu međusobno paralelne, već se sijeku u jednom pravcu. Ako su zadani valjak i stožac, plohe je pogodno siječi ravninama koje su paralelne s izvodnicama valjka, a prolaze vrhom stošca. U slučaju kada su zadana dva stošca, birat ćemo pramen ravnina koji sadrži pravac određen vrhovima tih dvaju stožaca. Svaka od ravnina siječi će zadane plohe u paru izvodnica. Sjecišta tih četiriju izvodnica tražene su točke prodorne krivulje.
Zaključujemo da je presjek pomoću pramena paralelnih ravnina zapravo samo specijalan slučaj presjeka s pramenom ravnina. To je pramen ravnina koje se sijeku u beskonačno dalekom pravcu.

3.2 2. metoda - Metoda presjeka s koncentričnim sferama

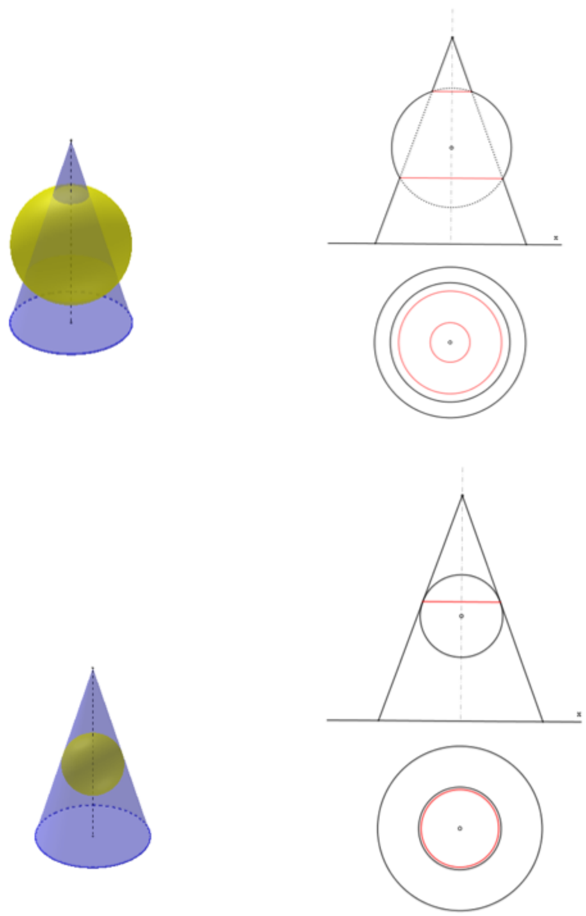
Da bismo uopće razmotrili konstrukciju prodorne krivulje metodom presjeka s koncentričnim sferama moraju biti zadovoljena dva uvjeta. Prvi je da obje plohe moraju biti rotacijske, a drugi da se osi ploha moraju siječi. Sjecište osi ploha je ujedno i središte sfera koje koristimo za konstrukciju prodorne krivulje i zbog toga govorimo o koncentričnim sferama.[2] Najmanja sfera koju promatramo je ona koja dodiruje iznutra barem jednu od ploha.

Neka je zadani uspravni valjak i sfera čije je središte na osi valjka. Njihova prodorna krivulja sastoji se od dvije kružnice jednakih polumjera. Ako bismo toj sferi smanjili polumjer pa gledali prodor valjka i te sfere, dobili bismo opet dvije kružnice jednakih polumjera. Postupak bismo mogli ponavljati sve dok ne dođemo do sfere koja iznutra dira valjak (dok sfera ne bude istog polumjera kao što je polumjer osnovke valjka).



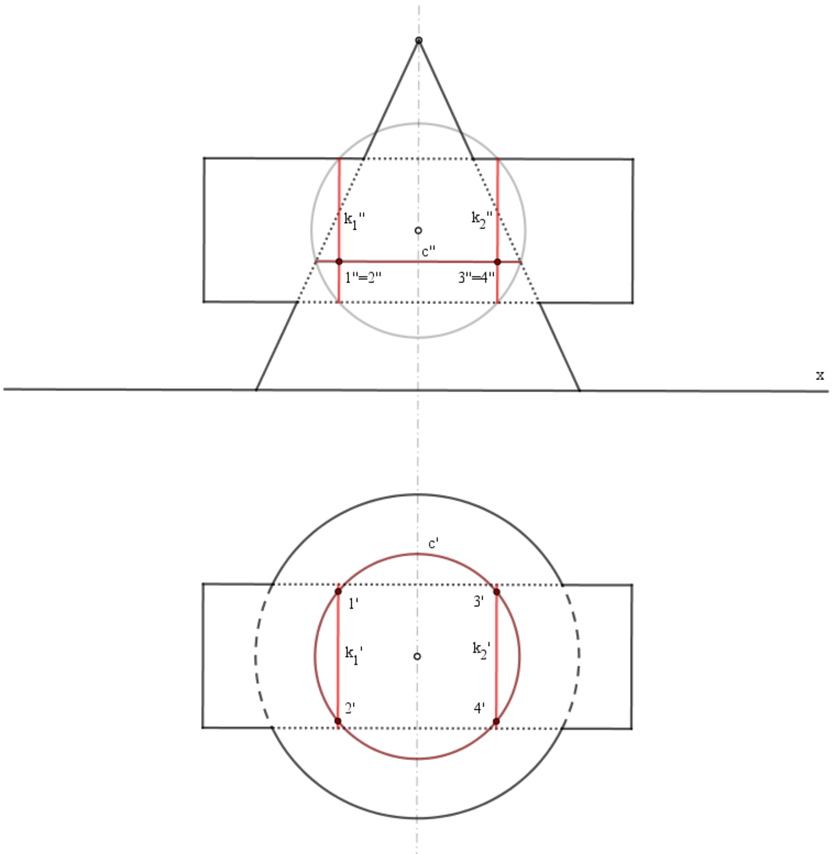
Slika 3.5: Raspad prodorne krivulje valjka i sfere

Neka su zadani uspravni stožac i sfera čije je središte na osi stošca. Presjek stošca i sfere su dvije kružnice, osim u slučaju kada sfera dodiruje iznutra stožac, tada je presjek jedna kružnica.



Slika 3.6: Raspad prodorne krivulje stošca i sfere

Primjer: neka je zadan prodor uspravnog valjka i uspravnog stošca tako da su zadovoljeni uvjeti za rad s drugom metodom. Proizvoljno biramo sferu većeg promjera od sfere koja dodiruje iznutra barem jednu od ploha. Prvo tražimo prodor valjka i sfere, a zatim stošca i sfere. Točke u kojima se sijeku tako dobivene prodorne krivulje, točke su prodorne krivulje valjka i stošca. Postupak ponavljamo biranjem neke druge sfere različitog polumjera od onog ranije.



Slika 3.7: Metoda presjeka s koncentričnim sferama

Sličan primjer je detaljnije napravljen u nastavku rada.

Poglavlje 4

Konstrukcije prodornih krivulja

4.1 Metoda presjeka s pramenom paralelnih ravnina

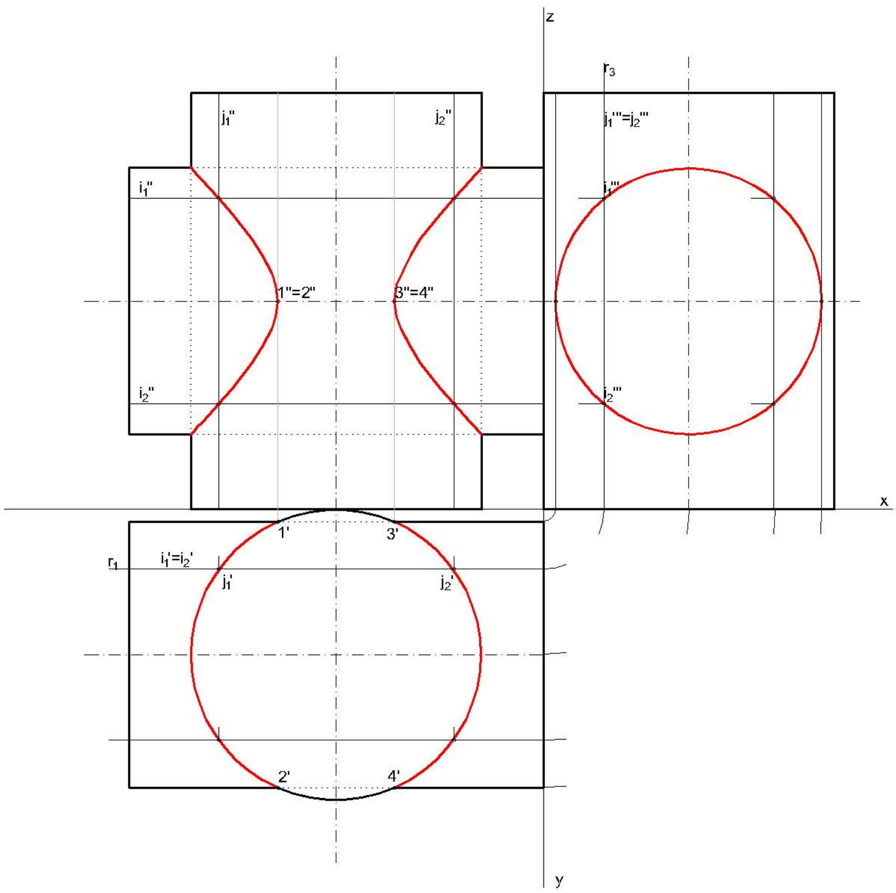
Prodor dva valjka - potpuni prodor

Konstruirajmo prodornu krivulju dvaju uspravnih valjaka; vertikalnog i horizontalnog valjka. Na temelju bokocrta njihovog prodora uočavamo da sve izvodnice horizontalnog valjka probadaju vertikalni valjak i zaključujemo da se radi o potpunom prodoru. Stoga je prodorna krivulja dvodijelna prostorna krivulja 4. reda. Plašt vertikalnog valjka projicira se u tlocrtu na kružnicu osnovke, a plašt horizontalnog valjka projicira se u bokocrtu u kružnicu njegove osnovke. Tako se prodorna krivulja u tlocrtu projicira na projekciju osnovke vertikalnog valjka, ali tlocrt prodorne krivulje je određen s dva kružna luka na tom tlocrtu osnovke. Nadalje, ona se u bokocrtu projicira u projekciju osnovke horizontalnog valjka. Budući da dva valjka imaju zajedničku simetralnu ravninu paralelnu s π_2, nacrt prodorne krivulje je krivulja 2. reda, u ovome slučaju hiperbola.

Jedna od ideja rješavanja ove konstrukcije je metoda presjeka s ravninama koje su paralelne s nacrtnom ravninom. One sijeku oba valjka po izvodnicama. Sjecišta tih izvodnica točke su prodorne krivulje. Izvodnice koje su presjek pomoćne ravnine i vertikalnog valjka u tlocrtu se projiciraju u točke koje se nalaze na prvome tragu promatrane pomoćne ravnine. Slično, izvodnice koje su presjek pomoćne ravnine i horizontalnog valjka, u tlocrtu se projiciraju u dužine koje leže na prvom tragu te pomoćne ravnine, u nacrtu se projiciraju u dužine, a u bokocrtu se projiciraju u točke koje se nalaze na trećem tragu pomoćne ravnine.

Promotrimo ravninu zadanu tragovima r_1, r_3. Ona horizontalni valjak siječe po izvodnicama i_1, i_2, a vertikalni po izvodnicama označenima s j_1, j_2. Sjecišta tih izvodnica točke su prodorne krivulje. Postavimo prvi trag pomoćne ravnine i najprije dobijemo tlocrte točaka prodorne krivulje, a zatim pomoću bokocrta i ordinala odredimo i nacrt i bokocrt točaka tražene krivulje. Postavimo li pomoćnu ravninu tako da ona bude tangencijalna ravnina horizontalnog valjka, dobit ćemo točke $1, 2, 3, 4$ koje se projiciraju u tjemena hiperbole koju dobijemo kao nacrt prodorne krivulje.

Na slikama je istaknuta i vidljivost kontura tijela. Dio konture koji je vidljiv, prikazan je punom linijom. Dio konture jednog tijela koji se nalazi unutar drugog tijela, prikazan je točkastom linijom. Dio konture jednog tijela koji je izvan drugog tijela, ali je zaklonjen drugim tijelom, prikazan je isprekidanom linijom.

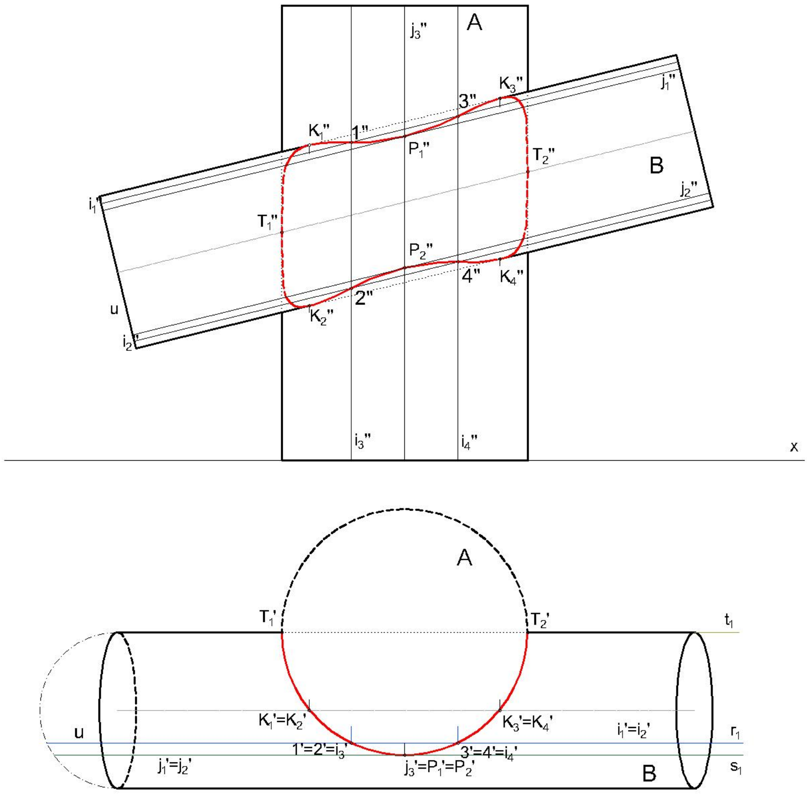


Slika 4.1: Potpuni prodor dvaju valjaka

Prodor dva valjka - zador

Dana su dva rotacijska uspravna valjka A i B čije su osi paralelne s nacrtnom ravninom. Uočimo da postoje izvodnice valjka A koje ne sijeku valjak B i izvodnice valjka B koje ne sijeku valjak A. Zbog toga, prodor nije potpun, govorimo o zadoru. Prodorna krivulja je jednodijelna prostorna krivulja 4. reda. Ona se u tlocrtu projicira u dio kružnice osnovke valjka A, a u nacrtu u ravninsku krivulju 4. reda.

Dani prodor rješavamo metodom presjeka s pramenom paralelnih ravnina. Radimo s ravninama paralelnima s nacrtnom ravninom jer one sijeku oba valjka u izvodnicama, i to svaka ravnina siječe svaki valjak po dvije izvodnice. Sjecišta tih izvodnica bit će točke prodorne krivulje. Postavimo prvu pomoćnu ravninu i neka je trag te ravnine trag r_1. Ta ravnina siječe valjak B u dvije izvodnice i_1, i_2 čiji tlocrti i_1', i_2' leže na tragu r_1. Da bismo odredili nacrte i_1'', i_2'' rotirajmo polovicu osnovke valjka u ravninu paralelnu s tlocrtnom ravninom. Nadalje, trag r_1 siječe osnovku valjka A u dvije točke $(1' = 2', 3' = 4')$. Te dvije točke ujedno su i tlocrti i_3', i_4' dviju izvodnica i_3, i_4 valjka A, ali i tlocrti točaka prodorne krivulje. Pomoću ordinala odredimo i_3'', i_4''. Promotrimo li sjecišta dobivenih nacrta izvodnica, dobili smo nacrte točaka prodorne krivulje; $i_1'' \cap i_3'' = 1'', i_2'' \cap i_3'' = 2'', i_1'' \cap i_4'' = 3'', i_2'' \cap i_4'' = 4''$. Postupak ponavljamo s ciljem da što preciznije dobijemo traženu krivulju. Zanimaju nas i granične izvodnice prodorne krivulje. Postavimo pomoćnu ravninu koja sadrži os valjka A i konturnu izvodnicu valjka B. Ta ravnina je ujedno i tangencijalna ravnina valjka B. Označimo njezin trag s t_1. Sjecište traga i osnovke valjka A su točke T_1' i T_2'. S obzirom da su to granične točke tlocrta prodorne krivulje, ordinalama odredimo njihov nacrt i tako dobijemo granične izvodnice nacrta prodorne krivulje. Nadalje, postavimo pomoćnu ravninu kroz os valjka B. Trag te ravnine daje točke prodorne krivulje $K_1' = K_2'$ i $K_3' = K_4'$. Nacrti tih točaka nalaze se na konturnim izvodnicama valjka B. Uzmimo i pomoćnu ravninu koja dodiruje valjak A. Ona siječe valjak B po izvodnicama j_1, j_2, a valjak A dodiruje po izvodnici j_3. Trag te ravnine označimo sa s_1. Nacrti izvodnica j_1, j_2 bit će ujedno i tangente nacrta prodorne krivulje u točkama P_1, P_2. Kada imamo dovoljan broj točaka spojimo ih i prodorna krivulja je konstruirana.



Slika 4.2: Zador dvaju valjaka

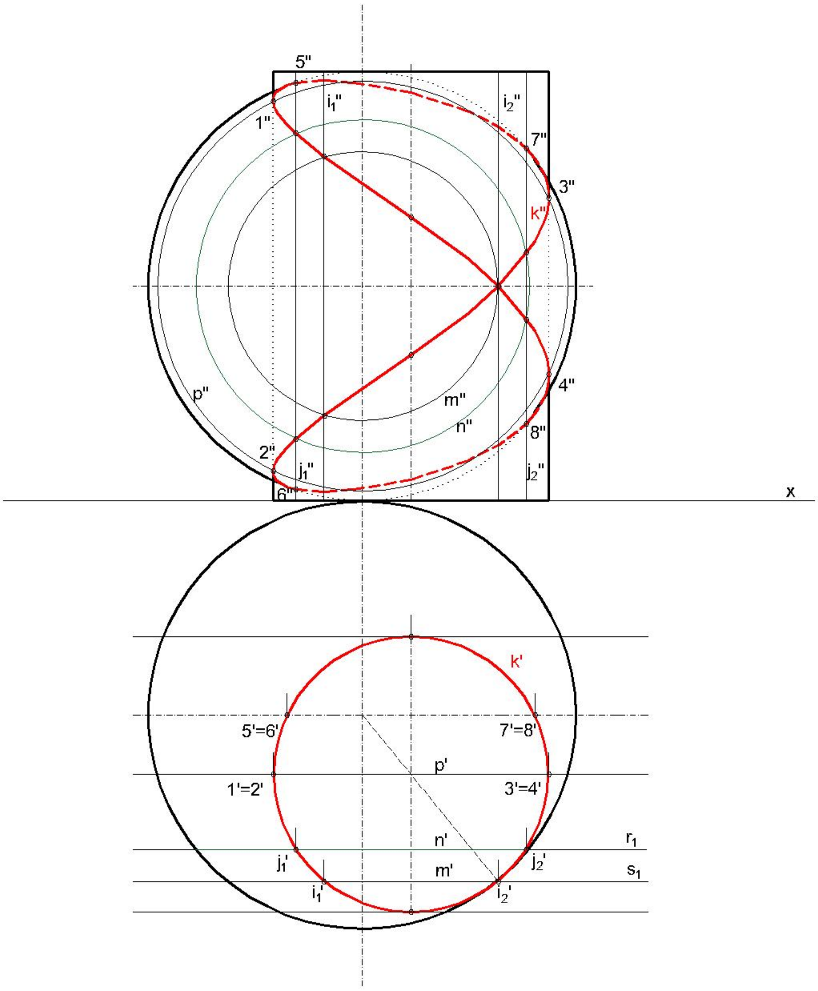
Prodor valjka i sfere koji se dodiruju u jednoj točki

Neka su zadani uspravni valjak i sfera koji se dodiruju u jednoj točki. Os valjka je okomita na tlocrtnu ravninu. Prodorna krivulja je prostorna krivulja 4. reda koja će imati jednu dvostruku točku. Cijeli plašt valjka, a time i prodorna krivulja, u tlocrtu se projicira u kružnicu k'.

Radit ćemo metodom presjeka s pramenom paralelnih ravnina i to ravninama koje su paralelne s nacrtnom ravninom. Presjek valjka svakom od ravnina su po dvije izvodnice, osim ako ravnina nije ujedno i tangencijalna ravnina valjka, tada kao presjek dobivamo samo jednu izvodnicu. Presjek sfere svakom od ravnina je kružnica. Sjecišta spomenutih izvodnica i kružnice točke su prodorne krivulje. Svaka se izvodnica u nacrtu projicira u dužinu, a u tlocrtu u točku, dok se svaka od kružnica u nacrtu projicira u kružnicu, a u tlocrtu u dužinu.

Uzmimo ravninu danu tragom r_1. Trag siječe tlocrt valjka u dvije točke i te dvije točke su tlocrti točaka prodorne krivulje. Svaka od tih točaka predstavlja ujedno i tlocrt dviju izvodnica valjka j_1, j_2. Nakon što konstruiramo ordinale u tim točkama, dobili smo nacrte tih izvodnica. Nadalje, trag siječe tlocrt sfere u tlocrtu kružnice n koja se u nacrtu projicira u kružnicu n''. Sjecište kružnice n'' s izvodnicama j_1'', j_2'' nacrti su točaka prodorne krivulje. Postupak ponavljamo uzimajući neku drugu ravninu zadanu svojim tragom.

Trag ravnine koja prolazi zajedničkom točkom valjka i sfere označimo sa s_1. Taj trag siječe valjak u dvije točke koje su tlocrti izvodnica i_1, i_2. Tlocrt dvostruke točke ujedno je i tlocrt izvodnice i_2. Nacrt dvostruke točke dobijemo kao sjecište izvodnice i_2'' i kružnice m''. Svakako kod konstrukcije koristimo još i sljedeće ravnine: ravninu koja je ujedno i tangencijalna ravnina valjka, ravninu koja prolazi osnim presjekom valjka te ravninu koja prolazi središtem sfere. Trag ravnine koja prolazi osnim presjekom valjka daje granične izvodnice prodorne krivulje u nacrtu. Te izvodnice su ujedno i konture valjka u nacrtu, a sjecišta njih i kružnice promjera p' su nacrti točaka prodorne krivulje $1'', 2'', 3'', 4''$ koje se nalaze na konturi valjka. U ravnini koja prolazi središtem sfere leže točke prodorne krivulje $5, 6, 7, 8$ čiji su nacrti na nacrtnim konturama sfere.



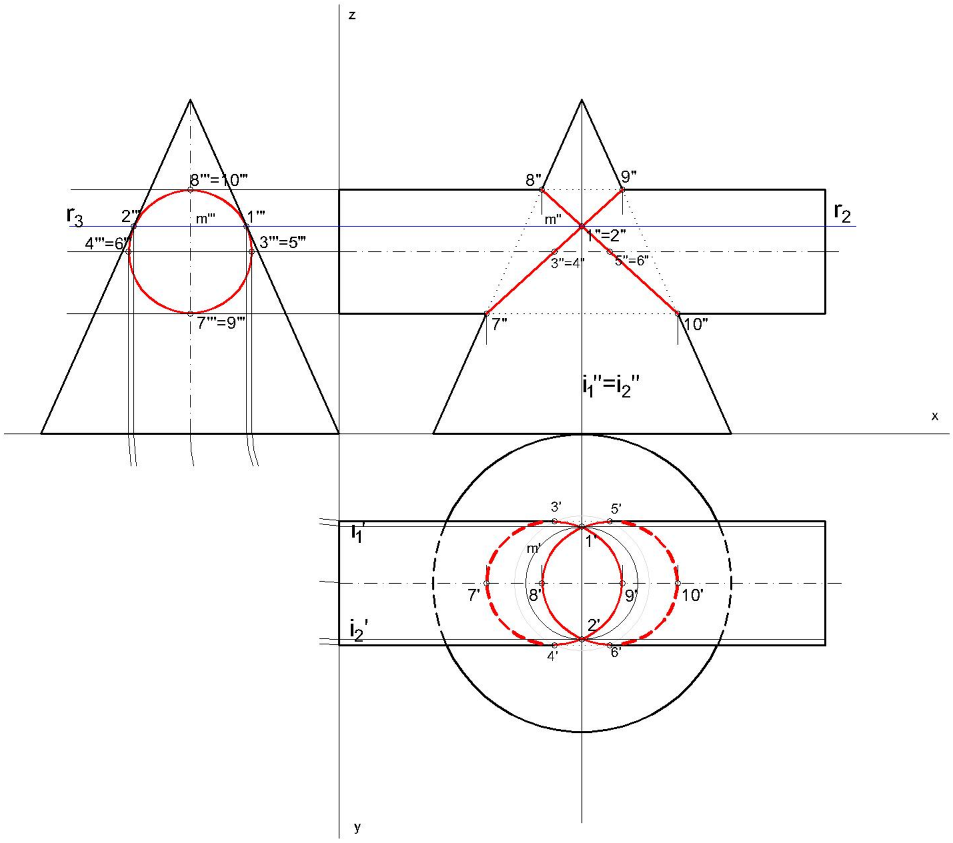
Slika 4.3: Prodor valjka i sfere koji se dodiruju u jednoj točki

Prodor valjka i stošca koji se dodiruju u dvije točke

Neka je zadani uspravni valjak paralelan s x-osi i uspravni stožac čija os je okomita na tlocrtnu ravninu. Promotrimo li bokocrt tih dvaju tijela u prodoru, kontura valjka siječe konturu stošca u dvije točke. U tim točkama valjak i stožac imaju zajedničke tangencijalne ravnine. Odmah možemo zaključiti da će u tim točkama i prodorna krivulja imati dvije dvostruke točke. Prodor je potpun, prodorna krivulja je 4. reda, ali zbog toga što ima dvije dvostruke točke ona se raspada na dvije krivulje 2. reda. Krenimo s konstrukcijom traženja prodorne krivulje. Pogodnija nam je metoda presjeka s pramenom ravnina.

1. način - pomoću bokocrtne ravnine

Prodorna se krivulja u bokocrtu projicira u kružnicu, točnije na bokocrt osnovke valjka. S obzirom da u bokocrtu vidimo dodirne točke, postavimo kroz njih ravninu paralelnu s tlocrtnom ravninom zadanu tragovima r_2, r_3. Ona siječe valjak po izvodnicama i_1, i_2, a stožac po kružnici m. Izvodnice i_1, i_2 u bokocrtu se projiciraju u točke koje leže na tragu r_3, u tlocrtu se projiciraju u dvije dužine, a u nacrtu u dužinu koja leži na tragu r_2. Kružnica m se u bokocrtu projicira u dužinu koja leži na tragu r_3, u tlocrtu u kružnicu, a u nacrtu u dužinu koja leži na tragu r_2. Sjecište kružnice m' i izvodnica i'_1, i'_2 tlocrti su točaka prodorne krivulje. Označimo ih s $1'$ i $2'$. Presjek traga r_2 i ordinale iz dobivenih točaka nacrti su dvostrukih točaka prodorne krivulje ($1'' = 2''$). Postupak ponavljamo uzimajući pomoćnu ravninu koja prolazi kroz osni presjek valjka. U bokocrtu, sjecište traga te ravnine i valjka su točke $4''' = 6'''$ i $3''' = 5'''$. Zadnje dvije pomoćne ravnine koje su dovoljne za konstrukciju prodorne krivulje su ravnine koje su ujedno i tangencijalne ravnine valjka. Presjek tragova tih ravnina i bokocrta osnovke valjka su točke koje označimo s $7''' = 9'''$ i $8''' = 10'''$. Imamo dovoljan broj točaka prodorne krivulje. Ona se sastoji od dvije elipse. Jednoj je velika os dužina $\overline{79}$, a mala $\overline{34}$, dok je drugoj velika os dužina $\overline{810}$, a mala $\overline{56}$. One se u tlocrtu projiciraju u dvije elipse, jednu kojoj je velika os $\overline{7'9'}$, a mala $\overline{3'4'}$ i drugu kojoj je velika os $\overline{8'10'}$, a mala $\overline{5'6'}$. U nacrtu se elipse projiciraju u dvije sukladne dužine koje se sijeku u jednoj točki.



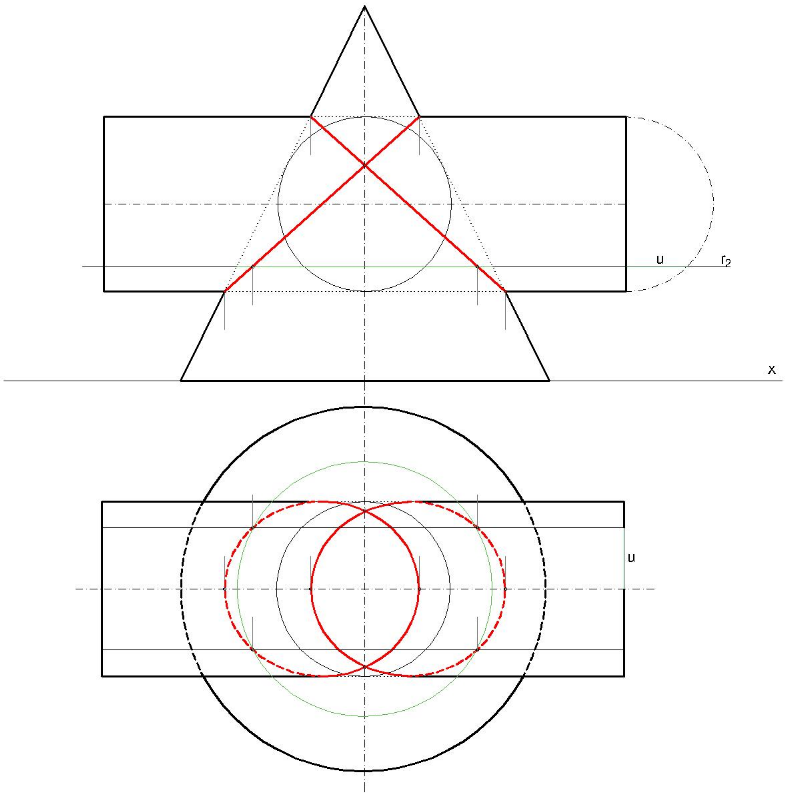
Slika 4.4: Prodor valjka i stošca koji se dodiruju u dvije točke - 1. način

2. način - pomoću rotacije polovice osnovke valjka

U Mongeovoj projekciji u nacrtu, rotirajmo polovicu osnovke valjka u ravninu paralelnu s nacrtnom ravninom. S obzirom da smo se odlučili za metodu presjeka s ravninama, odlučimo se za jednu ravninu paralelnu s tlocrtnom ravninom i označimo njezin trag s r_2. Ta ravnina siječe valjak u dvije izvodnice koje se u nacrtu projiciraju u jednu dužinu. Udaljenost u točke na polovici osnovke od vertikalnog promjera valjka prenosimo u tlocrt od osi valjka na obje strane. Tako smo dobili tlocrte izvodnica. Nadalje, ravnina siječe stožac u kružnici koja se u nacrtu projicira u dužinu. Zbog toga je ta dužina ujedno i promjer kružnice koju konstruiramo u tlocrtu. Presjek tlocrta izvodnica i kružnice tlocrti su točaka prodorne krivulje. Njih ordinalama određujemo u nacrtu. Sjecište ordinala i traga r_2 nacrti su točaka prodorne krivulje. Uočimo da po dvije točke prodorne krivulje imaju isti nacrt. Postupak ponavljamo tako što odaberemo neki drugi trag jedne od pomoćnih ravnina.

Kada bismo pomoćne ravnine postavili tako da one budu tangencijalne ravnine valjka, dobili bismo u nacrtu četiri točke koje se nalaze u sjecištu konturnih izvodnica valjka i stošca. One se u tlocrtu projiciraju na tlocrt osi valjka. Iste bismo točke dobili i kada bismo valjak i stožac sijekli zajedničkom simetralnom ravninom, tj. ravninom koja sadrži njihove osi, a paralelna je s π_2. Ona tijela siječe u njihovim nacrtnim izvodnicama. Zanimaju nas i konturne točke za tlocrt. Njih dobijemo kada pomoćnu ravninu postavimo točno po osi valjka.

Nakon što smo dobili određeni broj točaka prodorne krivulje uočimo sljedeće - u nacrtu smo dobili dvije dužine koje se sijeku. One se sijeku u točki koja je dvostruka točka prodorne krivulje valjka i stošca (kao što smo na početku rekli, valjak i stožac dodiruju se u dvije točke). Te dvije dužine su zapravo nacrti dviju elipsa koje se sijeku u dvije točke.



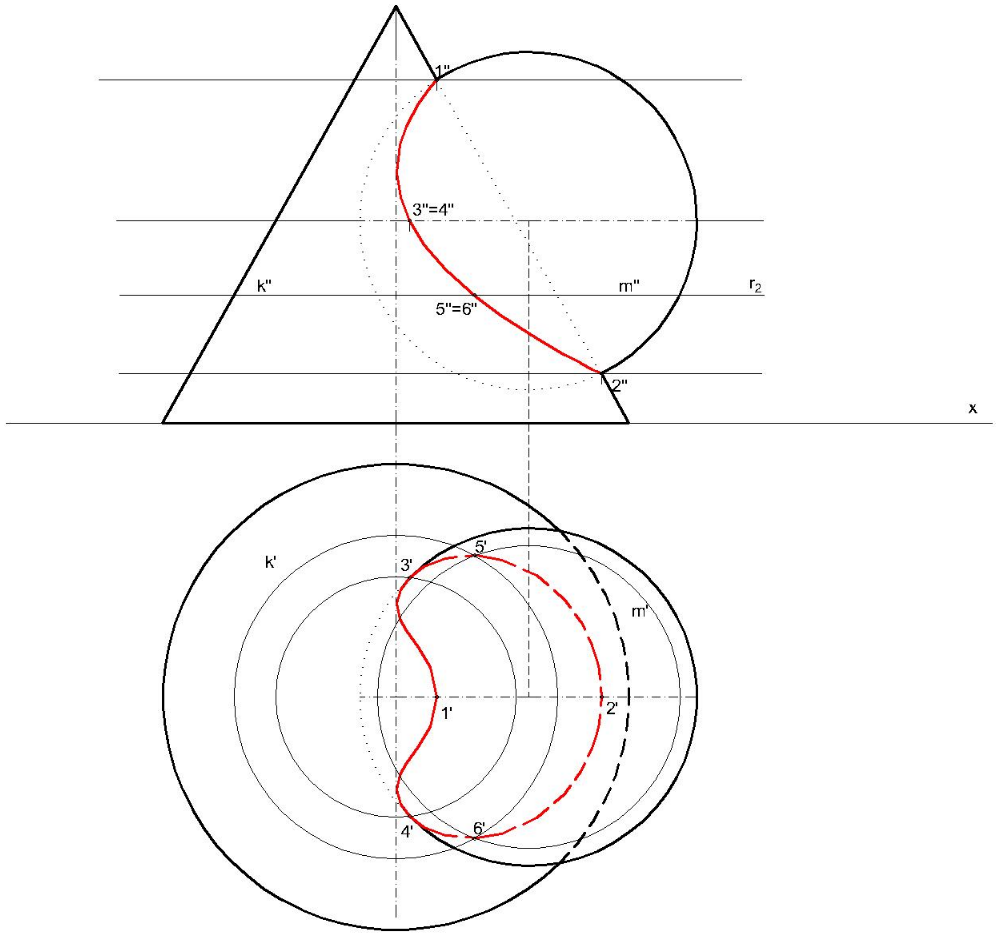
Slika 4.5: Prodor valjka i stošca koji se dodiruju u dvije točke - 2. način

Prodor stošca i sfere

Konstruirajmo prodornu krivulju uspravnog stošca s osnovkom u tlocrtnoj ravnini i sfere. Uočimo da postoje izvodnice stošca koje ne sijeku sferu. Radi se o nepotpunom prodoru, a prodorna krivulja je jednodijelna. Ona se u tlocrtu projicira u ravninsku krivulju 4. reda, a u nacrtu u ravninsku krivulju 2. reda.

Zajednička simetralna ravnina stošca i sfere paralelna s nacrtnom ravninom siječe stožac i sferu po nacrtnim konturama. Njihova sjecišta označimo s 1 i 2. Nadalje, plohe siječemo ravninama paralelnim s tlocrtnom ravninom. Svaka od pomoćnih ravnina siječe stožac i sferu po kružnici. Sjecišta tih kružnica točke su prodorne krivulje. Postavimo trag pomoćne ravnine kroz nacrt središta sfere. Znamo da na tom tragu leže nacrti kružnica koje dobijemo kao presjek. Sjecište tlocrta tih kružnica tlocrti su točaka prodorne krivulje oznake $3'$ i $4'$. Pomoću ordinala dobijemo nacrte tih točaka.

Istaknimo pomoćnu ravninu zadanu drugim tragom r_2. Ta ravnina siječe stožac po kružnici k koja se u nacrtu projicira u dužinu k'' koja leži na tragu r_2, a u tlocrtu se projicira u kružnicu k' promjera k''. Analogno i kod sfere; kružnica m, koja je presjek sfere i promatrane pomoćne ravnine, u nacrtu se projicira u dužinu m'' koja leži na tragu r_2, dok se u tlocrtu projicira u kružnicu m' promjera m''. Sjecišta tlocrta kružnica k' i m' tlocrti su točaka 5 i 6 prodorne krivulje. Ordinalama odredimo nacrte tih točaka. Postupak ponavljamo uzimajući neku drugu pomoćnu ravninu.



Slika 4.6: Prodor stošca i sfere

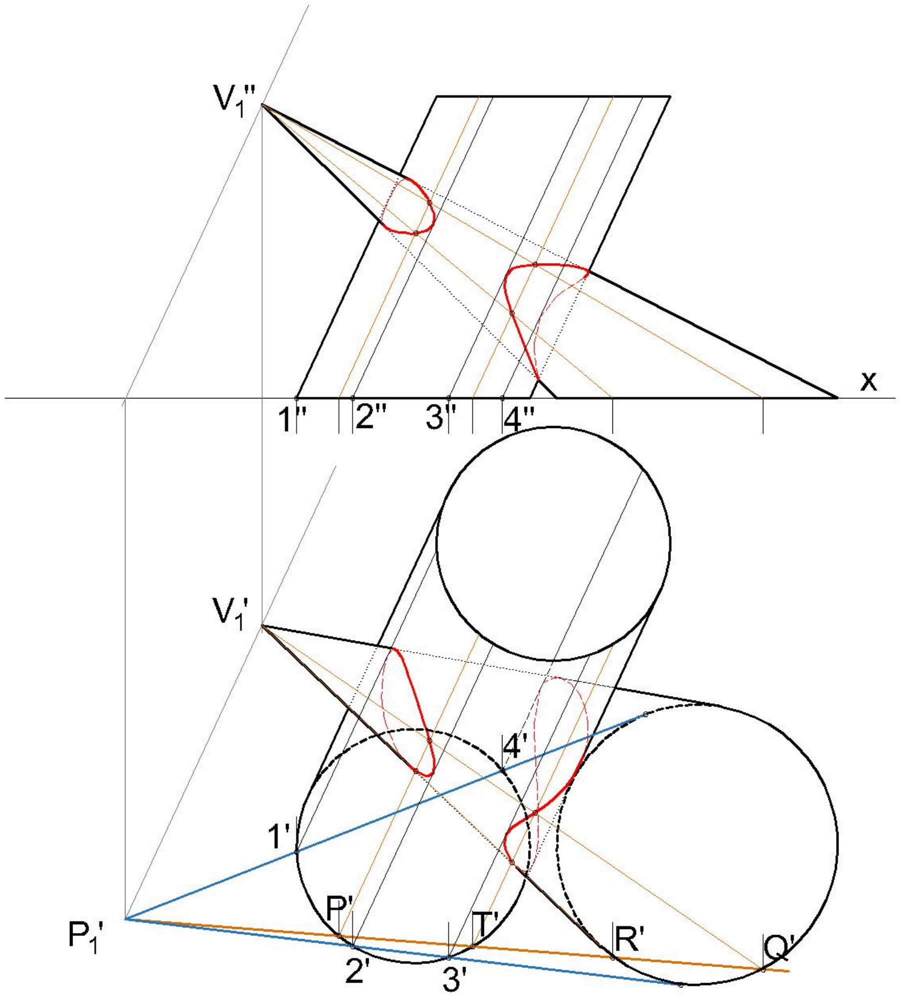
4.2 Metoda presjeka s pramenom ravnina koje nisu paralelne

Prodor kosog stošca i kosog valjka

Konstruirajmo prodornu krivulju kosog stošca i kosog valjka s osnovkama k_1 i k_2 u tlocrtnoj ravnini.[6] Neka osnovke nemaju zajedničkih točaka. Ovu konstrukciju rješavamo metodom presjeka s pramenom ravnina, ali ravnina koje nisu međusobno paralelne. Os pramena pravaca je pravac $V_1V_{2\infty}$, gdje je V_1 vrh stošca, a $V_{2\infty}$ beskonačno daleki vrh valjka (jer su sve izvodnice paralelne). Svaka ravnina ovog pramena siječe valjak i stožac u po dvije izvodnice. Najprije odredimo prvo probodište P_1 pravca $V_1V_{2\infty}$. Prema položaju tangenata iz točke P_1 na veću kružnicu k_1 zaključujemo da stožac potpuno prodire valjak i da se prodorna krivulja sastoji od dva dijela. Presjek tangenata iz točke P_1 i kružnice k_2 su točke $1, 2, 3$ i 4. Jedan dio prodorne krivulje je na plaštu valjka na dijelu ograničenom izvodnicama s nožištima 1 i 2, a drugi dio krivulje na dijelu ograničenom izvodnicama s nožištima 3 i 4. Tako smo dobili ograničenja (granične izvodnice) za krivulju u nacrtu. Te granične izvodnice su ujedno i tangente prodorne krivulje.

Odredimo prodorne točke konturnih izvodnica najprije u tlocrtnoj ravnini, a zatim ordinalama i u nacrtnoj ravnini. Znamo da točke prodorne krivulje određujemo kao prodorne točke izvodnica jednog tijela kroz drugo. Konstruirajmo prodorne točke konturne izvodnice s nožištem R na kružnici k_1. Pomoćna ravnina zadana svojim tragom kroz točke P_1' i R' siječe kružnicu k_1' još u točki Q' i kružnicu k_2' u točkama P' i T'. Prema tome, ova ravnina siječe plašt stošca po izvodnicama iz točaka R i Q i plašt valjka po izvodnicama iz točaka P i T. Četiri presječne točke ovih izvodnica jesu točke prodorne krivulje. Dvije od njih, na konturnoj izvodnici iz R, jesu u projekciji dodirne točke krivulje i konturne izvodnice.

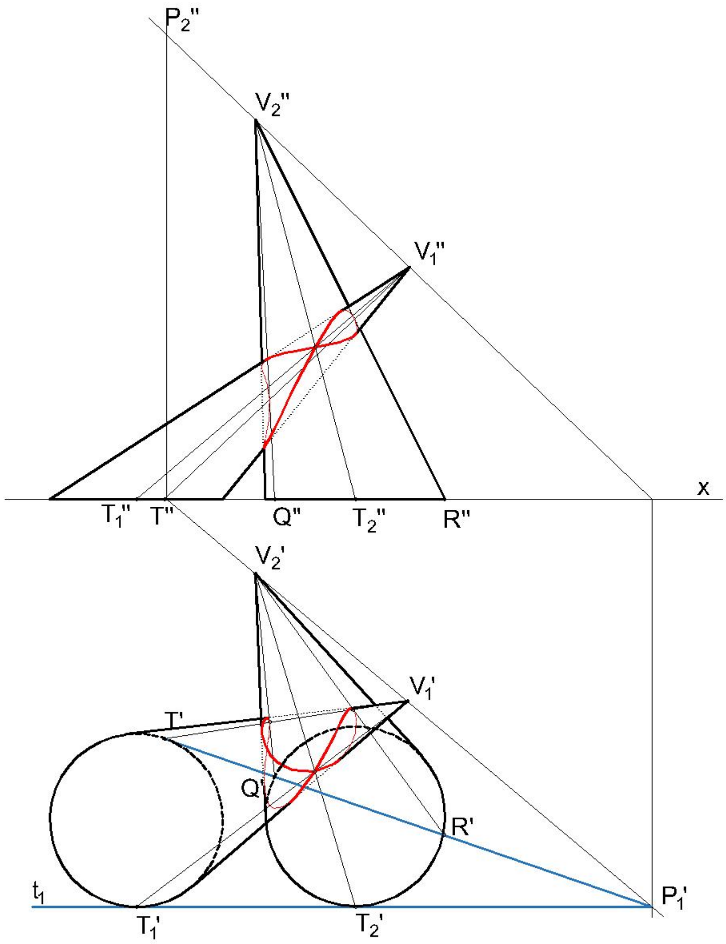
Postupak ponavljamo; u tlocrtnoj ravnini uzimamo neki pravac kroz P_1' koji siječe obje osnovke. U točkama gdje se sijeku spomenuti pravac i osnovke, povucimo izvodnice. U sjecištu tih izvodnica nalaze se točke prodorne krivulje. Kada imamo dovoljan broj točaka, spojimo ih.



Slika 4.7: Prodor kosog stošca i kosog valjka

Prodor dvaju kosih stožaca

Konstruirajmo prodornu krivulju dvaju kosih stožaca koji su dani svojim projekcijama.[6] Njihove osnovke nalaze se u tlocrtnoj ravnini i nemaju zajedničkih točaka. k_1 i V_1 neka su osnovka i vrh prvog stošca, a k_2 i V_2 osnovka i vrh drugog stošca. Koristit ćemo metodu presjeka s pramenom ravnina kroz os V_1V_2. Dakle, odmah možemo zaključiti da ćemo kao presjek s pomoćnom ravninom dobiti pravce na kojima leže izvodnice stožaca. Neka je točka P_1 prvo probodište pravca V_1V_2. Lako odredimo i drugo probodište, točku P_2. Pretpostavimo da je jedna od ravnina pramena zajednička tangencijalna ravnina zadanih stožaca. Označimo njezin trag s t_1. Trag t_1 ujedno je i tangenta osnovaka te ih dodiruje redom u točkama T_1 i T_2. Iz točke P_1 konstruiramo drugu tangentu na k_1'. Ona dodiruje tu kružnicu u točki T, dok k_2' siječe u točkama Q i R. Prema položaju prvih tragova pomoćnih ravnina zaključujemo da stožac s vrhom V_1 prodire potpuno kroz stožac s vrhom V_2. S obzirom da imamo tangencijalnu ravninu za obje plohe, imamo i dvostruku točku prodorne krivulje. Sve te točke su nam bitne za određivanje graničnih izvodnica prodorne krivulje. Jedan dio krivulje nalazi se između izvodnica QV_2 i T_2V_2, a drugi dio između izvodnica RV_2 i T_2V_2. Štoviše, na izvodnici T_2V_2 nalazi se zajednička točka ovih dijelova prodorne krivulje. Ostale potrebne točke prodora konstruiramo na sljedeći način: uzmimo novi trag ravnine kroz točku P_1. On siječe obje kružnice u po dvije točke. Spojimo ta sjecišta s pripadnim vrhovima. Tamo gdje se dobivene izvodnice stožaca sijeku dobili smo točke prodorne krivulje. Postupak smo radili u tlocrtnoj ravnini pa je ordinalama potrebno dobiti te točke i u nacrtnoj ravnini. Postupak ponavljamo dok ne dobijemo dovoljan broj točaka prodorne krivulje.

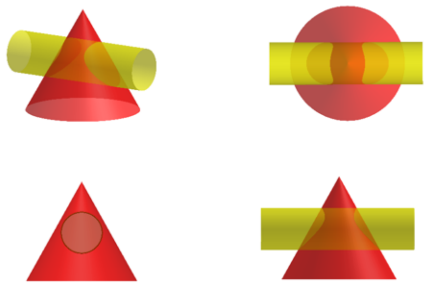


Slika 4.8: Prodor dvaju kosih stožaca

4.3 Metoda presjeka s koncentričnim sferama

Prodor valjka i stošca kojima se osi sijeku

Neka su zadani valjak i stožac kojima se osi sijeku.

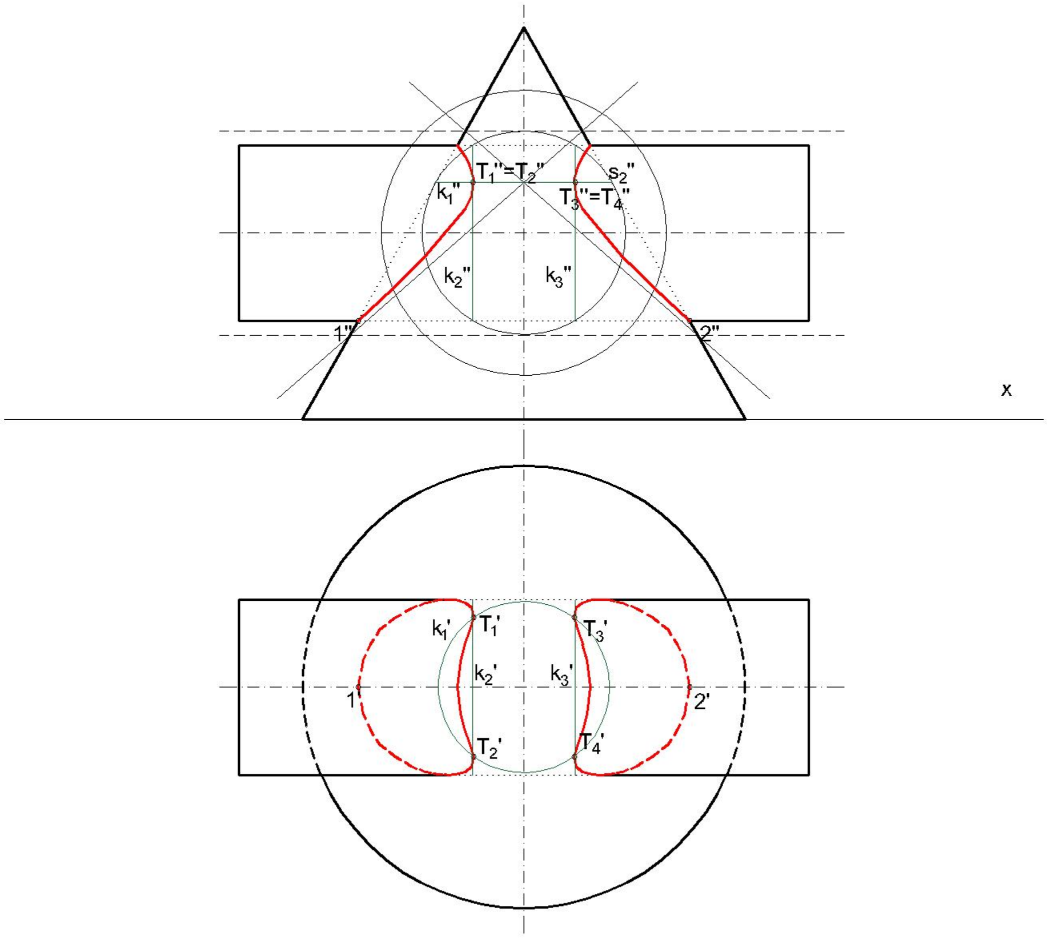


Slika 4.9: Prodor valjka i stošca kojima se osi sijeku - 3D prikaz

Prodor je potpun jer sve izvodnice valjka prodiru stožac (lako uočljivo na temelju bokocrta). Prodorna krivulja je prostorna krivulja 4. reda i sastoji se od dva dijela. Valjak i stožac imaju zajedničku simetralnu ravninu paralelnu s bokocrtnom ravninom, ali i zajedničku simetralnu ravninu paralelnu s nacrtnom ravninom. Stoga se prodorna krivulja u bokocrtu i nacrtu projicira u krivulje 2. reda. U bokocrtu se ona projicira u kružnicu osnovke valjka, a u nacrtu u hiperbolu. U tlocrtu se prodorna krivulja projicira u ravninsku krivulju 4. reda.

Iako se konstrukcija prodorne krivulje može riješiti i prvom metodom, sada ćemo je riješiti drugom metodom, metodom koncentričnih sfera. Središte pomoćnih sfera bit će sjecište osi. Najveća sfera koju uzimamo je ona koja prolazi kroz dvije konturne točke valjka i stošca. To su u nacrtu točke $1''$ i $2''$. Tlocrti tih točaka nalaze se na tlocrtu osi valjka. Presjek sfere i valjka su dvije kružnice koje se u nacrtu projiciraju u dvije dužine, a u tlocrtu u dvije kružnice. Promatramo i projiciramo samo one dužine koje sijeku nacrt i valjka i stošca. Sjecišta dužina u nacrtu su nacrti točaka prodorne krivulje, dok su sjecišta kružnice i dužina u tlocrtu tlocrti točaka prodorne krivulje. Postupak ponavljamo smanjujući prethodnoj sferi promjer. Možemo se pitati gdje stajemo, koja je zadnja sfera zadanog središta koju koristimo u metodi. Ako ne postoji sfera koja ima središte u sjecištu osi, a da istovremeno dodiruje valjak i stožac, a u našem slučaju ne postoji, tražimo neko drugo rješenje. Promotrimo sferu koja iznutra dodiruje stožac po kružnici k_1, a prodire valjak u kružnicama

k_2 i k_3. U nacrtu se ta sfera vidi kao krug čija je kontura kružnica s_2''. Sjecišta spomenutih kružnica točke su prodorne krivulje oznake T_1, T_2, T_3, T_4. Proširimo valjak tako da dira tu kružnicu s_2'' u dvije točke. Spojimo li unakrsno sjecište konturnih izvodnica proširenog valjka i stošca dobijemo asimptote hiperbole u nacrtu. Po dva tjemena padaju u istu točku u nacrtu. Točke spojimo i tako smo dobili nacrt i tlocrt prodorne krivulje. Dakle, nacrt prodorne krivulje je hiperbola, a tlocrt ravninska krivulja 4. reda.

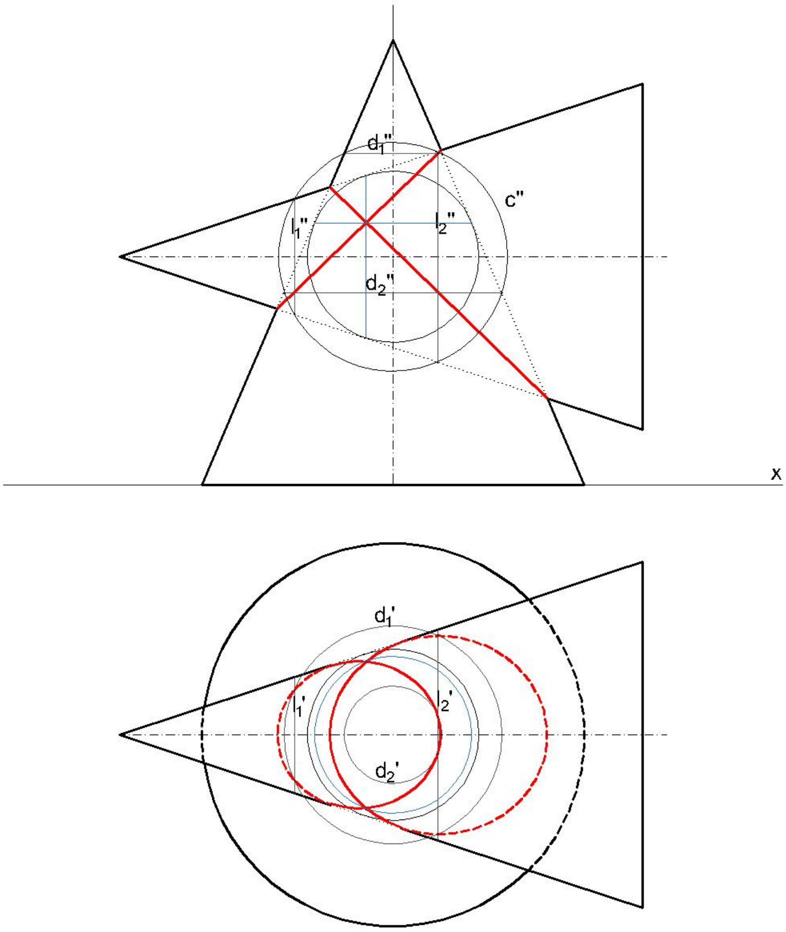


Slika 4.10: Prodor valjka i stošca kojima se osi sijeku

Prodor dvaju stožaca kojima se osi sijeku

Neka su zadana dva uspravna stošca kojima se osi sijeku, takva da postoji kugla koja istodobno dodiruje oba stošca. Ona svaki od stožaca siječe u po jednoj kružnici čiji su presjeci dvije točke u kojima stošci imaju zajedničke tangencijalne ravnine. Prodorna krivulja imat će dvije dvostruke točke. Ona je 4. reda i raspast će se na dvije krivulje 2. reda.

Koristit ćemo metodu traženja prodorne krivulje pomoću presjeka s koncentričnim sferama. Početni uvjeti, da tijela moraju biti rotacijska i da im se osi moraju siječi, su zadovoljeni. Najprije uočimo točke u nacrtu koje se nalaze u sjecištu konturnih izvodnica stožaca. U tlocrtu one će se nalaziti na tlocrtu osi horizontalno postavljenog stošca. U to se brzo uvjerimo postavljenjem sfere koja prolazi tim točkama. Uzmimo sferu čija je nacrtna kontura c''. Ona vertikalno postavljeni stožac siječe u dvije kružnice koje se u nacrtu projiciraju u dužine d_1'', d_2'', a u tlocrtu u kružnice d_1', d_2'. Horizontalno postavljeni stožac siječe u dvije kružnice koje se u nacrtu projiciraju u dužine l_1'', l_2'', a u tlocrtu u dužine l_1', l_2'. Presjeci dužina $d_1'', d_2'', l_1'', l_2''$ nacrti su točaka prodorne krivulje. Presjeci spomenutih kružnica d_1', d_2' i dužina l_1', l_2' tlocrti su točaka prodorne krivulje. Postupak ponavljamo smanjujući polumjer pomoćnim sferama, a stajemo kada dođemo do sfere koja dodiruje oba stošca. Ta sfera će biti zadnja koju promatramo. Nakon što smo dobili točke prodora vidimo da smo u nacrtu dobili dvije dužine i zaključujemo da se radi o dvije elipse.



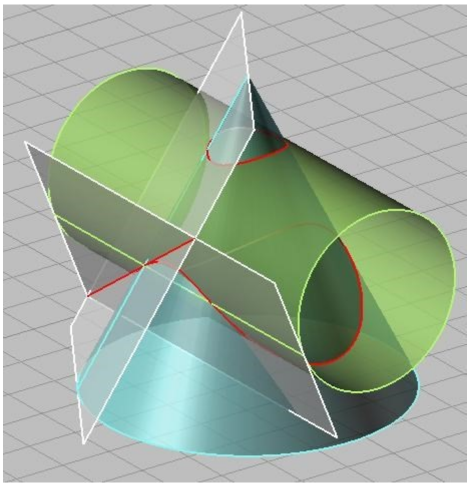
Slika 4.11: Prodor dvaju stožaca kojima se osi sijeku

Poglavlje 5

Tangenta prodorne krivulje

5.1 Tangencijalne ravnine

Neka je zadana ploha i točka T te plohe. Tangencijalna ravnina u točki T sadrži tangente svih krivulja koje leže na plohi i prolazi točkom T. Ukoliko su dane dvije plohe i njihova prodorna krivulja, tangenta u nekoj točki prodorne krivulje mora ležati i u tangencijalnoj ravnini jedne i u tangencijalnoj ravnini druge plohe. Pa je tako tangenta prodorne krivulje u nekoj njenoj točki presječnica tangencijalnih ravnina ploha u toj točki.

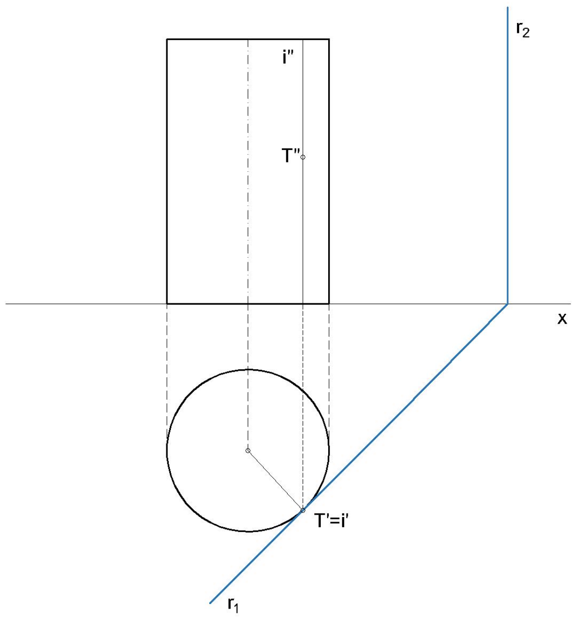


Slika 5.1: Tangenta prodorne krivulje

Tangencijalna ravnina valjka

Tangencijalna ravnina valjka je ravnina koja je paralelna s osi valjka i s valjkom ima samo jednu zajedničku izvodnicu. U toj ravnini leže sve tangente koje prolaze nekom točkom te zajedničke izvodnice. Tangencijalna ravnina siječe ravninu osnovke valjka po pravcu koji je ujedno i tangenta osnovke.[7]

Neka su dani tlocrt i nacrt uspravnog valjka. Izvodnica i prolazi kroz točku T koja leži na prednjoj strani valjka. Na slici je prikazana tangencijalna ravnina koja s valjkom ima zajedničku izvodnicu i i okomita je na tlocrtnu ravninu. Njezin prvi trag r_1 ujedno je i tangenta osnovke valjka, dok je drugi trag r_2 okomit na x-os.

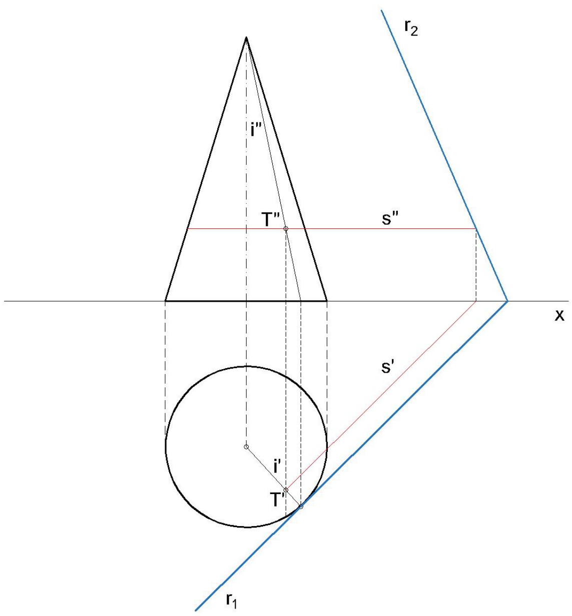


Slika 5.2: Tangencijalna ravnina valjka

Tangencijalna ravnina stošca

Tangencijalna ravnina stošca prolazi vrhom stošca i sa stošcom ima zajedničku samo jednu izvodnicu.[2] Svakom točkom stošca, osim njegovim vrhom, moguće je postaviti jednu tangencijalnu ravninu. Tangenta svih krivulja stošca koje prolaze nekom točkom stošca leže u tangencijalnoj ravnini.

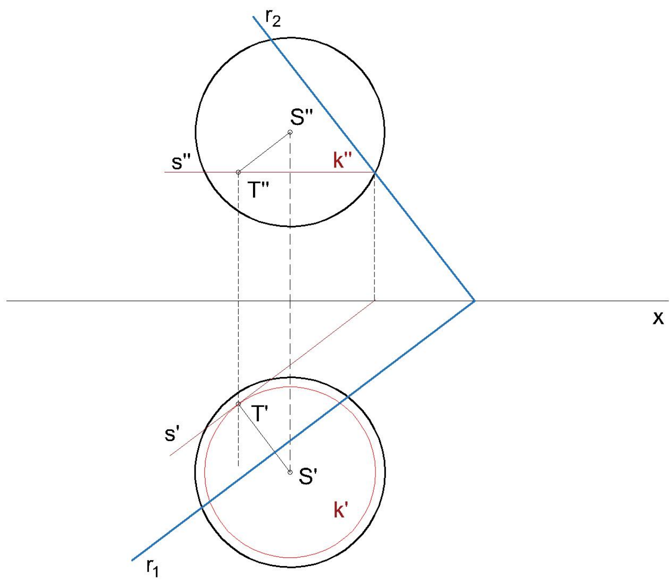
Neka su zadani tlocrt i nacrt uspravnog stošca kao na slici. Izvodnica i prolazi točkom T koja leži na prednjoj strani stošca. Duž te izvodnice postavljena je tangencijalna ravnina. Stoga ona prolazi i točkom T. Prvi trag r_1 tangenta je osnovke stošca u nožištu izvodnice i. Dakle, prvi trag i tlocrt izvodnice i su međusobno okomiti. Drugi trag r_2 dobije se pomoću sutražnice prve vrste točkom T ili vrhom stošca. Ako bi se osnovka uspravnog stošca nalazila u nacrtnoj ravnini, tada bi drugi trag tangencijalne ravnine bio tangenta osnovke.



Slika 5.3: Tangencijalna ravnina stošca

Tangencijalna ravnina sfere

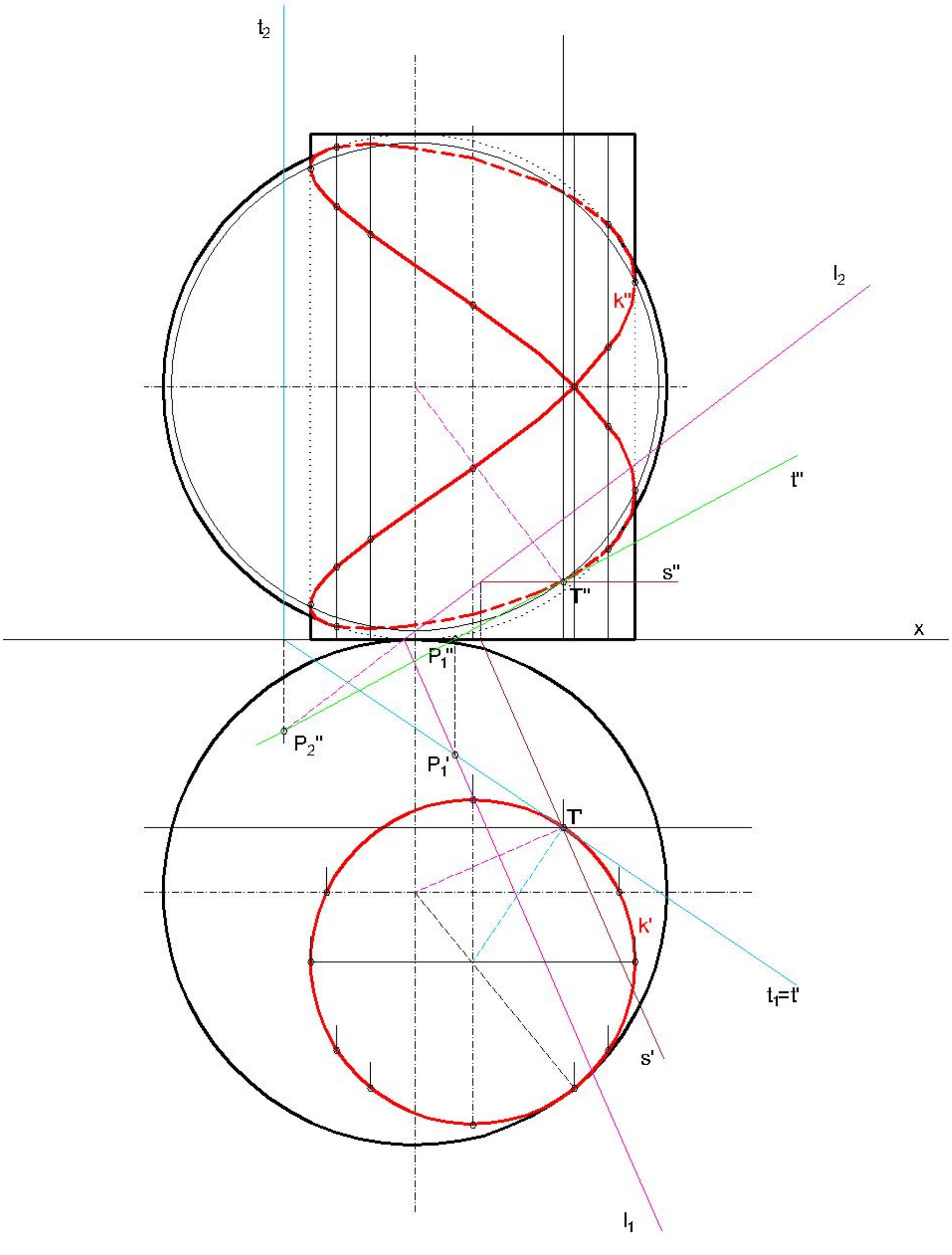
Sve tangente u nekoj točki sfere leže u jednoj tangencijalnoj ravnini i okomite su na spojnicu središta sfere i promatrane točke sfere. Neka su zadani tlocrt i nacrt sfere te nacrt točke T koja leži na stražnjoj strani sfere. Tlocrt točke T određen je pomoću kružnice k koja prolazi točkom T i paralelna je s tlocrtnom ravninom. Kružnica k će se u nacrtu projicirati u dužinu k'', a u tlocrtu u kružnicu k'. Tangencijalna ravnina sfere u točki T okomita je na spojnicu ST pa je tako prvi trag r_1 okomit na $S'T'$, a drugi trag r_2 okomit na $S''T''$. Za određivanje tragova korištena je sutražnica s prve vrste tangencijalne ravnine koja prolazi točkom T.



Slika 5.4: Tangencijalna ravnina sfere

5.2 Primjer tangente prodorne krivulje u nekoj njezinoj točki

Nakon što smo ranije u radu konstruirali prodornu krivulju valjka i sfere koji se dodiruju u jednoj točki, konstruirat ćemo tangentu t u nekoj točki dobivene prodorne krivulje. Neka je to točka označena s T. Neka je tangencijalna ravnina valjka u točki T zadana tragovima t_1, t_2, a tangencijalna ravnina sfere u točki T tragovima l_1, l_2. Lako dobijemo te tangencijalne ravnine primijenjujući konstrukcije iz dijela rada "Tangencijalna ravnina valjka" i "Tangencijalna ravnina sfere". Tražimo presječnicu t dobivenih ravnina. Tlocrt prvog probodišta P_1 presječnice presjek je prvih tragova l_1, t_1. Nacrt te točke leži na x-osi. Nacrt drugog probodišta P_2 presječnice presjek je drugih tragova l_2, t_2. Tlocrt te točke leži na x-osi. Pravac $P_1''P_2''$ nacrt je tražene tangente t, dok je pravac $P_1'P_2'$ tlocrt tangente t koji leži na prvom tragu tangencijalne ravnine valjka.



Slika 5.5: Tangenta prodorne krivulje valjka i sfere

Bibliografija

[1] Gorjanc, S., Jurkin, E., Kodrnja, I., Koncul, H., *Deskriptivna geometrija*, `http://www.grad.hr/geometrija/udzbenik/`, pristupljeno 20. 11. 2018.

[2] Horvatić-Baldasar, K., Babić, I., *Nacrtna geometrija*, SAND d.o.o., Zagreb, 1997.

[3] Justinijanović, J., *Nacrtna geometrija za II. razred tehničkih škola*, Školska knjiga, Zagreb, 1959.

[4] Niče, V., *Deskriptivna geometrija*, Školska knjiga, Zagreb, 1987.

[5] Szirovicza, V., Jurkin, E., *Deskriptivna geometrija*, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Hrvatsko društvo za konstruktivnu geometriju i kompjutorsku grafiku, Zagreb, 2005.

[6] Šnajder, Z., *Nacrtna geometrija*, ICS, Beograd, 1976.

[7] Varošanec, S., *Predavanja iz nacrtne geometrije 2018./2019.*, `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ng/dodatni/`, pristupljeno 20. 11. 2018.

Sažetak

U radu smo se ograničili na proučavanje prodora valjaka, stožaca i sfera. Najprije smo razmotrili koje krivulje dobijemo kao presjek tih ploha ravninom, a nakon toga kakve krivulje dobijemo u prodoru spomenutih ploha. Upoznali smo metode koje koristimo pri konstrukciji prodornih krivulja dviju ploha u Mongeovoj projekciji. Prva metoda je metoda presjeka s pramenom ravnina. Pomoćne ravnine mogu, ali i ne moraju biti međusobno paralelne. Presjek jedne plohe i pomoćne ravnine je neka krivulja, presjek druge plohe i iste pomoćne ravnine je neka krivulja. Sjecišta tih dviju presječnih krivulja točke su prodorne krivulje. Postupak se ponavlja dok ne dobijemo dovoljan broj točaka koje na kraju spojimo. Druga metoda je metoda presjeka s koncentričnim sferama. Za njezinu primjenu trebaju biti zadovoljena dva uvjeta: plohe trebaju biti rotacijske, osi ploha se trebaju sijeći. Sjecište osi ploha središte je pomoćnih sfera i zbog toga govorimo o koncentričnim sferama. Ako je dan prodor ploha i zadovoljena su oba uvjeta za rad s metodom, sjecišta prodornih krivulja jedne plohe i pomoćne sfere te prodornih krivulja druge plohe i te iste pomoćne sfere daju točke tražene prodorne krivulje ploha. Postupak ponavljamo uzimajući neku drugu sferu koja s plohama ima zajedničke točke. Na kraju rada spomenuta je i tangenta prodorne krivulje. Tangenta u nekoj točki prodorne krivulje presječnica je tangencijalnih ravnina ploha u toj točki.

Summary

In this thesis, we focus on studying the penetration of cylinders, cones and spheres. To begin with, we have considered which curve is the result of a cross section of these three surfaces with a plane, and after that which curves we get as a result of penetration of the surfaces. We familiarize with the methods used to construct penetrating curves of two of surfaces in Monge's projection. The first method is a cross section method with a streak of plane. Auxiliary planes could, but don't have to, be parallel. A cross section of a surface and an auxiliary plane is a curve, whereas a cross section of another surface and the same auxiliary plane is another curve. Intersection of these two curves are points of penetrating curve. The process is repeated until there are enough points to merge them in the end. The second method is a cross section method with concentric spheres. To apply this method, two conditions have to be met: surfaces need to be rotational, and axes of surfaces have to intersect. The intersection of axes is the center of auxiliary spheres and that is the reason why we are talking about concentric spheres. If the penetration of surfaces is known and both conditions to work with the method are met, the intersections of penetrating curves one of a surface and auxiliary sphere, and penetrating curves of another surface and the same auxiliary sphere give points of looked-for penetrating curve of the surfaces. The process is repeated by choosing another sphere which shares some common points with the surfaces. In the end of the thesis, the tangent of penetrating curve is mentioned. The tangent in some point of penetrating curve is a transversal of tangential plane of surfaces in the mentioned point.

Životopis

Zovem se Lara Novak. Rođena sam 15. 2. 1991. godine u Čakovcu (Republika Hrvatska). Nakon završetka Osnovne škole Vladimira Nazora u Pribislavcu upisujem Gimnaziju Čakovec, jezični smjer. Godine 2010. upisujem Prirodoslovno - matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu. Završetkom preddiplomskog studija Matematike - nastavnički smjer stječem akademski naziv sveučilišnog prvostupnika edukacije matematike. Godine 2015. upisujem diplomski studij Matematike - nastavnički smjer na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu.